OPISNO MJERSTVO
(DESKRIPTIVNA GEOMETRIJA)

ZA V.—VIII. RAZREDA REALNIH GIMNAZIJA

NAPISAO

DR. JURAJ MAJCEN

KR. JAVNI REDOVITI SVEUČILIŠNI PROFESOR

S 310 CRTEŽA I 530 ZADATAKA ZA VJEŽBU

DRUGO IZDANJE

CIJENA K 80.

U ZAGREBU 1921.

TROŠKOM I NAKLADOM KR. HRV.-SLAV. ZEMALJSKE VLADE

16265

OPISNO MJERSTVO

(DESKRIPTIVNA GEOMETRIJA)

ZA V.—VIII. RAZREDA REALNIH GIMNAZIJA

NAPISAO

DR. JURAJ MAJCEN

KR. JAVNI REDOVITI SVEUČILIŠNI PROFESOR

S 310 CRTEŽA I 530 ZADATAKA ZA VJEŽBU

DRUGO IZDANJE

CIJENA K 80.

KR. HRV. SLAV. ZEMALJSKA NAKLADA ŠKOLSKIH KNJIGA I TISKANICA

U ZAGREBU 1921.

TROŠKOM I NAKLADOM KR. HRV.-SLAV. ZEMALJSKE VLADE.

Ova se knjiga ne smije skuplje prodavati nego za cijenu naznačenu na prednjoj strani.

TISAK KR. ZEMALJSKE TISKARE U ZAGREBU.

Uputstvo

za upotrebu ove knjige.

Knjiga je u glavnom podijeljena na tri dijela i dodatak. Prvi dio obasiže građu za V. razred. Drugi se dio dijeli na četiri odsjeka, od kojih prva tri obuhvataju građu VI. razreda. Četvrti odsjek drugoga dijela i prvi odlomak trećega dijela, t. j. linearna perspektiva, daju građu za VII. razred, a ostatak pripada u VIII. razred.

Maleni odsjeci, u kojima se tumače pojedina pitanja i rješavaju pojedini zadaci, obilježeni su paragrafima od 1.—167. jedinstveno za cijelu knjigu. Svaki paragraf ima u tekstu svoj poseban natpis. Gore nad slogom naznačen je na svakoj strani broj paragrafa, koji dolazi na toj strani.

Knjizi je dodano kazalo (str. XIII.), u kojem su navedena imena i nazivlja po abecednom redu. Uza svako ime u kazalu stoji broj onoga paragrafa, u kojem to ime dolazi prvi put u knjizi, ili gdje se o njemu daju dalji znatniji podaci. Kazalom se dakle može lakše i brže doznati, na kojem se mjestu što obrađuje, negoli listanjem po knjizi!

U pojedinim se paragrafima često navodi broj pređašnjega kojega paragrafa, u kojem je o istome pitanju bio već prije govor. To mjesto treba uvijek potražiti i proučiti, jer je za potpuno razumijevanje onoga pitanja znatno.

Stereometrijske odnose i poučke (§§ **3.**—**7.**) treba točno proučiti, jer bez njihova sigurna poznavanja rad u opisnom mjerstvu nije moguć. Dobro će biti, da se ti poučci i dokažu načinom, koji se uči u stereometriji.

Slike u knjizi služe za to, da se vidi, kako se upotrebljava istumačen postupak, i kojim se načinom izvode projekcije. Kod učenja je napose svagda potrebno, da se slike crtaju nanovo. Kad je postignuta jasnoća i sigurnost u rješenju, dobro će biti, da se položaji zadanih dijelova promijene, a onda zadatak na novo razriješi. Napokon treba u mislima ispitati, je li novi rezultat u skladu s učinjenom promjenom položajâ.

Gdjegod se u knjizi upućuje na kontrolu za točnost crtanja, treba takvu kontrolu provesti. Rezultat može biti neispravan zato, što se zlo upotrebio način rješavanja, ali i zato, što se nije dosta točno crtalo spravama.

*

Zadaci su označeni redom od 1.—530. jedinstveno za cijelu knjigu. Svi se zadaci, koji pripadaju propisnoj građi, ne će moći uvijek razriješiti. Izbor će zadataka za vježbu zavisiti o postignutoj sigurnosti učenika u rješavanju. Napose ne valja zapustiti kosu projekciju, koja svojim jednostavnim postupkom znatno potpomaže prostornu predstavu odnosâ i predmetâ.

Opisno je mjerstvo progresivna nauka, t. j. u njoj se od jednostavnijega polazi neprestano naprijed u sve zamršenije probleme. U svakom i najsitnijem pitanju treba zato nastojati oko što jasnijega poimanja, jer se inače može dogoditi, da napredak na kasnijem kojem stepenu ne će biti lako moguć. Građa prvoga dijela (V. razred) temelj je za sve ostale dijelove, pa je zato točno poznavanje toga temelja bitan uvjet za razumijevanje predmeta.*)

U Zagrebu, o Uskrsu god. 1918.

Dr. J. Majcen.

*) Predgovor za ovu knjigu gledaj u XXVI. sv. „Nastavnoga vjesnika“ (1918.).

Sadržaj.

Prvi dio

§.		Strana
	Uvod	1
1.	Zadaća opisnoga mjerstva	1
2.	Obilježenje elemenata u opisnom mjerstvu	3
	Stereometrijski odnosi i poučci	3
3.	Općeni projektivni odnosi	3
4.	Usporednost (paralelizam) pravaca i ravninâ	5
5.	Okomitost (normalitet) pravaca prema ravninama	6
6.	Prikloni kutovi	8
7.	Okomite (normalne) ravnine	9

Prvi odsjek.

Temelji projiciranja paralelnim zrakama.

I. Normalno projiciranje na jednu ravninu.

8.	Kotirana projekcija točke i prušca	10
9.	Prava dužina prušca. Probodište. Prikloni kut. (Zad. 1.—11.)	12
10.	Dva pravca i njihove kotirane projekcije. (Zad. 12.—15.)	13
11.	Graduiranje pravca. (Zad. 16.—18.)	15
12.	Ravnina, normalna na ravnini projekcijâ	17
13.	Predočivanje ravnine u općenom položaju. (Zad. 19.—23.)	18
14.	Pravac i ravnina. (Zad. 24.—26.)	20
15.	Dvije ravnine. (27.—31.)	23
16.	Presjeci tjelesâ pravcima i ravninama	24
17.	Preloženje ravnine. (Zad. 32.—34.)	25

§. Strana

II. Normalno projiciranje na dvije ravnine.

18. Normalne projekcije točke 27
19. Projekcije prušca. (Zad. 35.—37.) 28
20. Prava veličina prušca. (Zad. 38.—49.) 30
21. Određivanje ravnine. (Zad. 50.—52.) 32
22. Ravnina okomita na Π_1 ili na Π_2. (Zad. 53.—56.) 33

III. Kosa projekcija.

23. Kosa projekcija točke i prušca. (Zad. 57.) 35
24. Pravila za koso projiciranje 37
25. Predočivanje tjelesâ u kosoj projekciji 37
26. Općena kosa projekcija 38
27. Predočivanje tjelesa u općenoj kosoj projekciji. (Zad. 58.—64.) 40

Drugi odsjek.

Proširenje područja projiciranja.

I. Četiri prostorna kvadranta.

28. Normalne projekcije točaka, koje su u različnim kvadrantima 42
29. Pružac, kojemu su krajne točke u različnim kvadrantima. (Zad. 65.—68.) 43

II. Projiciranje na treću ravninu.

30. Treća ravnina projekcijâ Π_3, normalna na Π_1 i na Π_2. (Zad. 69.—74.) 45
31. Treća ravnina Π_3, normalna samo na Π_2 ili samo na Π_1 47
32. Predočivanje tjelesâ s pomoću 3. projekcije (stranocrta) 48
33. Određenje prave veličine prušca s pomoću 3. projekcije. (Zad. 75.—82.) 49

Treći odsjek.

Temeljne i neke sastavljene zadaće.

I. Pravci i ravnine u općenom i paralelnom položaju.

34. Projekcije neomeđena pravca 50
35. Probodišta pravca s Π_1 i s Π_2. Prikloni kut 51
36. Dva pravca. (Zad. 83.—95.). 52
37. Ravnina i pravac 53
38. Dvije ravnine. (Zad. 96.—105.) 56

§. Strana
39. Određenje ravnine tragovima. (Zad. 106.—110.) 57
40. Sutražnice za prvi i za drugi trag ravnine. (Zad. 111.—118.) 59
41. Pravac paralelan s ravninom. Paralelne ravnine 61
42. Presječnica dviju ravnina. (Zad. 119.—131.) 62
43. Probodište pravca s ravninom. (Zad. 132.—141.) 66

II. Konstrukcije o sjenama.

44. Općene pripomene o sjenama za paralelnu rasvjetu 67
45. Sjena tijela i ravnoga lika 71
46. Sjena jednoga ravnoga lika na drugi 72
47. Sjene uz centralnu rasvjetu. (Zad. 142.—160.) 74

III. Pravci i ravnine u okomitom položaju. Prikloni kutovi.

48. Priklonica i prikloni kut ravnine. (Zad. 161.—168.) 75
49. Pravci i ravnine, što su među sobom normalni (okomiti) 77
50. Normalne ravnine 79
51. Upotreba 3. projekcije za određenje udaljenosti. (Zad. 169.—187.) . . 79

IV. Preloženje ravnine i projekcije ravnih likova.

52. Preloženje ravnine oko traga u jednu ravninu projekcijâ 83
53. Upotreba osi istovetnosti za zadanu ravninu 85
54. Određenje normalnih projekcija pravilnoga višekuta 85
55. Okretanje ravnine u položaj paralelan s Π_I ili s Π_2 86
56. Prikloni kut dviju ravnina ρ i ν. (Zad. 188.—202.) 87

V. Okretanja (rotacije).

57. Okretanje točke oko pravca 89
58. Okretanje prušca u osobit položaj 90
59. Okretanje tijela u općeniji položaj. (Zad. 203.—212.) 91

Drugi dio.

Prvi odsjek.

Projekcije uglastih tjelesa u općenom položaju.

60. Postanak uglastih tjelesa 94
61. Projekcije i sjene uspravne prizme 95

§. Strana
62. Projekcije uspravne piramide, kojoj je osnovka u zadanoj ravnini. (Zad. 213.—214.) 97
63. Projekcije pravilnoga oktaedra. (Zad. 215.—216.) 98
64. Projekcije kocke i izvedenoga kristalnoga oblika. (Zad. 217.—219.) . . 99
65. Kosa i ortogonalna projekcija pentagonalnoga dodekaedra. (Zad. 220.—222.) 101
66. Projekcije ikozaedra. (Zad. 223.—224.) 103
67. Bačena sjena u nutarnjost nepravilne piramide. (Zad. 225.—227.) . . 104
68. Projekcije romboedra. (Zad. 228.—229.) 107
69. Određenje bačene sjene složenoga tijela. (Zad. 230.—249.) 108

Drugi odsjek.

Kružnica i oble tračne površine.

I. Projekcije i sjene kružnice.

70. Elipsa kao normalna projekcija kružnice 110
71. Projekcije kružnice, koja je u zadanoj ravnini u općenom položaju . . 113
72. Projekcije kružnice, koja ispunjava zadane uvjete 113
73. Kosa projekcija kružnice. Određenje za osi elipse 114
74. Sjena kružnice na zadanu ravninu 117
75. Sjene kružnice na ravnine projekcijā Π_1 i Π_2. (Zad. 250.—268.) . . 118

II. Predočivanje oblih tračnih površina.

76. Izvođenje valjka 120
77. Izvođenje stošca 121
78. Projekcije valjka, njegovih izvodnica i točaka 123
79. Projekcije stošca, njegovih izvodnica i točaka. (Zad. 269.—282.) . . . 123
80. Projekcije valjka i stošca u općenim položajima 126
81. Projekcije tijela, koje je sastavljeno od valjaka i stožaca. (Zad. 283.—290.) 129

III. Dodirne ravnine i sjene oblih tračnih površina.

82. Dodirna (tangencijalna) ravnina 129
83. Određenje dodirne ravnine u točki stošca 131
84. Dodirne ravnine valjka i stošca, paralelne sa zadanim pravcem 132
85. Dodirne ravnine, položene točkom na stožac ili valjak 133
86. Sjena valjka u kosoj i ortogonalnoj projekciji 134
87. Sjena stošca u kosoj projekciji 136
88. Bačena sjena i samosjena tijela, koje je složeno od stožaca i valjaka. (Zad. 291.—304.) 137

§. Strana.

Treći odsjek.

Ravni presjeci i prodori tračnih tjelesa.

I. Presjeci tjelesa ravninom. Mreže.

89. Općeni postupak za određenje presjekâ ravninama 139
90. Presjek prizme ravninom 139
91. Određenje presjeka prizme transformacijom 142
92. Mreža uspravne i kose prizme. (Zad. 305.—317.) 143
93. Presjek uspravnoga valjka ravninom 145
94. Mreža uspravnoga valjka zajedno s presječnom crtom 147
95. Presjek kosoga valjka ravninom. (Zad. 318.—325.) 149
96. Presjek piramide ravninom 151
97. Mreža piramide 152
98. Presjek piramide ravninom uz pomoć transformacije. (Zad. 326.—335.) . 152
99. Različne vrste presjekâ stošca ravninom 154
100. Eliptički presjek uspravnoga stošca ravninom 157
101. Mreža stošca zajedno s razastrtom presječnom krivuljom 158
102. Eliptički presjek kosoga stošca ravninom 159
103. Parabolički presjek stošca ravninom 162
104. Hiperbolički presjek stošca ravninom 163
105. Upotreba ravnih presjeka za određenje bačene sjene jednoga tijela na drugo. (Zad. 336.—350.) 165

II. Afinitet i kolineacija.

106. Srodnost afiniteta 169
107. Kolinearna srodnost. (Zad. 351.—360.) 171

III. Prodori tračnih tjelesa.

108. Općena pravila za određenje prodorâ 173
109. Prodor dvaju valjaka 175
110. Prodor dviju prizama 177
111. Prodor dvaju stožaca 178
112. Prodor dviju piramida 179
113. Prodor valjka i stošca 181
114. Prodor prizme i piramide 183
115. Bačene sjene u nutarnjost valjka i stošca 184
116. Bačene sjene složenoga obloga tijela. (Zad. 361.—383.) 187

§. Strana

Četvrti odsjek.

Kugla, rotacione površine i krivulje 2. reda.

I. Predočivanje kugle i rotacionih površina.

117. Izvođenje i normalne projekcije kugle 189
118. Kosa projekcija kugle 192
119. Projekcije kugle, koja je zaokrenuta oko pravca u nov položaj. (Zad. 384.—394.) 193
120. Izvođenje i razdioba rotacionih površina 195
121. Predočivanje rotacionih površina 2. reda 197

II. Ravni prerezi i prodori kugle i rotacionih površina.

122. Prerez kugle ravninom 200
123. Određenje projekcijâ za presjek kugle ravninom, koja ima općen položaj 201
124. Presjek rotacione površine ravninom 202
125. Prodori kugle uspravnim valjkom i stošcem. (Zad. 395.—409.) . . . 203

III. Dodirne ravnine i sjene kugle i rotacionih površina.

126. Dodirna ravnina kugle 206
127. Dodirna ravnina rotacionoga paraboloida 207
128. Sjena kugle uz paralelnu rasvjetu. Najsjajnija točka 208
129. Tangenta iz točke na kuglu. Sjene kugle za centralnu rasvjetu . . . 211
130. Sjena u nutarnjost šuplje polukugle. (Zad. 410.—421.) 213

IV. Stereografska projekcija.

131. O načinu stereografskoga projiciranja 214
132. Glavna svojstva stereografske projekcije 215
133. Svojstvo konformnosti stereografske projekcije 217
134. Uporaba stereografske projekcije. (Zad. 422.—424.) 218

V. Krivulje 2. reda u svezi s kuglom i s rotacionim površinama.

135. Vrste presjekâ za rotacioni stožac ravninom. Dandelinov poučak . . . 220
136. Jednadžba elipse. Elipsa kao presjek valjka ravninom 222
137. Jednadžba meridijana za jednoplošni hiperboloid 224

VI. Zadaće o razrješavanju trobrida.

138. Pravokutni sferni trokut i pripadni trobrid 225
139. Kosokutni sferni trokut i općeni trobrid. Polarni trobridi. (Zad. 425.—427.) 228

§. Strana

Treći dio.

Prvi odsjek.

Centralno projiciranje (perspektiva).

I. Linearna perspektiva uopće.

140. Općene pripomene o centralnom projiciranju 233
141. Ravnina slike Π i njezini osobiti elementi 234
142. Perspektiva točke iz njezinih normalnih projekcija. (Zad. 428.—432.) . 235
143. Perspektive paralelnih pravaca. Nedogled. (Zad. 433.—440.) 236
144. Primjeri za nedoglede na fotografskoj slici 239
145. Upotrebe za metodu linearne perspektive. (Zad. 441.—448.) 239
146. Određenje perspektivne slike koordinatama (metoda distancijâ). (Zad. 449.—453.) 242
147. Određenje perspektivnih slika neposrednom upotrebom nedogledâ . . 245
148. Stereoskopske slike (Zad. 454.—460.) 248

II. Općena centralna projekcija (slobodna perspektiva).

149. Projekcija pravca i točke 249
150. Predočivanje ravnine. (Zad. 461.—468.) 250
151. Dvije ravnine. Pravac i ravnina. (Zad. 469.—476.) 252
152. Prikloni kut pravca i ravnine prema ravnini slike 253
153. Okomica ravnine. (Zad. 477.—485.) 254
154. Preloženje ravnine 256
155. Predočivanje prizme i stošca u općenom položaju 257
156. Sjekotine stošca kao centralne projekcije kružnice. (Zad. 486.—492.) . 258

Drugi odsjek.

Perspektivnost i projektivna srodnost.

I. Prameni zrakâ i nizovi točaka.

157. Perspektivni prameni i nizovi 260
158. Projektivna srodnost 263
159. Dvoomjer i njegova nepromjenljivost. (Zad. 493.—498.) 264

II. Projektivnost i krivulje 2. stepena.

160. Najjednostavnije nadopunjivanje projektivnih pramena 267

§. Strana
161. Projektivno izvođenje krivuljâ 2. stepena 269
162. Svojstva krivuljâ 2. stepena u svezi s projektivnim izvođenjem. (Zad. 499.—506.) 270

Treći odsjek.

Historijski pregied o razvoju opisnoga mjerstva.

163. Perspektiva i ortogonalna projekcija 272
164. Praktični i teoretski smjer opisnoga mjerstva 274

Dodatak.

165. Zadaće o konstrukciji sunčanih ura. (Zad. 507.—509.) 277
166. Cilindrička spirala. (Zad. 510.—511.) 280
167. Zadaci za ponavljanje. (512.—530.) 282

Kazalo.

(Brojevi znače paragrafe; u zagradama su naznačeni dijelovi paragrafâ).

Afini likovi 17, 106
Agvilonij 131
Aksonometrija 26, 164
Alberti L. B. 163
Apolonije 156, 164
Asimptota 104, 121
Bačena sjena 44, 88, 128
Bokocrt 30
Bošković R. J. 138
Brewster 148
Brid 60
Brunelleschi F. 163
Buache F. 8
Centralna rasvjeta 44, 47, 85
Centralno projiciranje 1 (3), 140, 163
Centrička kolineacija 107, 154
Cilindrička spirala 166
Daljina 5, 49, 51 (b), 141
Dandelinov poučak 135
Desargues G. 163
Descartes R. 163, 164
Dijametri (konjugirani) 71, 72, 73, 89, 93, 95, 102, 119
Diralište krivulje 2. razr., 162
Distancija 141
Dodekaedar (rombički) 27, (pentagonalni) 60, 65
Dodirna ravnina 82—5, 126
Dvije ravnine (prikl. kut) 56
Dvoomjer 159
Dvotočka krivulje 111
Ekvator 117, 121, 165
Ekvatorijalna projekcija 134
Elipsa 70, 73, 93, 95, 99, 100, 102, 118, 119, 135, 136, 156, 161
Elipsoid rotacioni 120, 121
Euklidova optika 163
Euklidovi Elementi 7, 60
Fotografska slika 140, 144
Fotogrametrija 164
Geodezija 164
Geografska širina 165
Geometrija položaja 164
Geometrografija 164
Glavna točka 141
Gnomon (gnomonika) 165
Graduiranje pravca 11
Grafička statika 164
Heksaedar (kocka) 27, 59, 60, 64
Hiparh 131, 163
Hiperbola 99, 104, 135, 137, 156
Hiperboloid (dvoplošni) 120, 121, (jednoplošni) 120, 121, 137
Horizont 141, 165
Horizontalna projekcija 18
Horizontalna sunčana ura 165
Identičnost 2
Ikozaedar 60, 66
Infleksija 94, 95
Interval 11

Ishodište 18
Istostrani stožac 80 (2)
Istovetnosti os, 53, 90, 106; ravnina istov., zad. 121.
Izvodnica 60, 76, 77
Izvođenje prizme i piramide 60
Jednadžba elipse 136, (hiperb. 137)
Jednakost dvoomjera 159
Kavalirska perspektiva 23
Kazalo (na sunčanim urama) 165
Kepler J. 60
Klin 6 (3)
Klinogonalno (koso) projiciranje 1 (2), 23
Kocka (heksaedar) 27, 59, 60, 64
Kolineacija 107, 154
Konformnost 133
Kongruentni prameni, zad. 494.
Konjugirani dijametri 71, 72, 73, 89, 93, 95, 102, 119
Koordinate 136, 146
Korespondentni elementi 157
Kosa projekcija kružnice 73 (1, 2)
Kosinusov poučak 139
Kosinusova crta, zad. 510.
Koso (klinogonalno) projiciranje 1 (2), 23
Kota 8
Kotirana projekcija 8, 164
Kristalni oblici 27, 32, 60, 64
Kristalografija 60
Krivulje 2. reda i razreda 161
Kružnica distancije 141, 149
Kugla 12, 117, 118
Kvadranti prostora 28
Lagrange J. L. 163
Lambert J. H. 163
Lémoine E. 164
Linearna perspektiva 140
Lom sjene 44 (4)
Menehmo 99
Meridijan 117, 120, 134, 165
Metoda distancijâ 146
Metode opisn. mjerstva 164
Metrički odnosi 1, 152, 158, zad. 501.
Mimosmjerni pravci 3 (7), 4 (4), 10, 36, 51 (b)
Mjerilo 9, 11
Monge G. 18, 163
Mreža piramide (prizme) 1, 9, 21, 92, 97
Mreža valjka (stošca) 94, 95, 101
Nadopunjivanje pramenâ i nizova 157, 160
Najsjajnija točka 128
Najuži krug 121
Najveća kružnica 117
Najviša (najniža) točka presjeka 94, 102, 103, 104
Nedogled 143
Nedogledna zraka 143
Nedoglednica (trag) 150
Neomeđen pravac 34
Neperovo pravilo 138
Niveau-krivulje 8, 12, 14
Niz točaka 3 (8), 157
Normala (okomica) 5, 49, 153
Normalitet 5
Normalne (okomite) ravnine 7, 50
Normalno (ortogonalno) projiciranje 1 (1), 163
Nosilac točke 149
Novija geometrija 158, 164
Nožište normale 5, 18
Obilježenje elemenata 2
Određenje krivulje 2. stepena 162
Određenje projektiviteta 158
Okomica (normala) 5, 49, 153
Okomite (normalne) ravnine 7, 50
Okretanja 55, 57
Oktaedar 60, 63
Olivierov teorem 94

Opis (descriptio) 2
Ordinala 18
Ortogonalno (normalno) projiciranje 1 (1), 18, 163
Os istovetnosti 53, 90, 106
Os okretanja 57
Os x ortogonalnih projekcija 18
Osi elipse 70, 73
Parabola 99, 103, 135, 156, 161
Paraboloid rotacioni 120, 121, 127
Paralelizam 1, 4
Paralelna perspektiva 23
Paralelna projekcija 24
Paralelne ravnine 38 (1), 41, 151
Paralelne zrake svjetlosti 44
Paralelni pravci 3 (6), 10, 11, 36, 143
Pentagonalni dodekaedar 60, 65
Perspektiva 1 (3), 7, 140, 163, 164
Perspektivitet 157
Perspektivna os 157
Perspektivno središte 157
Piramida 9, 16, 22, 44 (6), 60, 62, 67, 96, 98
Pitagorin poučak, zad. 10.
Planiglob, zad. 424.
Plašt 76, 77
Platonova tjelesa 60
Pobočna projekcija (bokocrt) 30
Pohlkeov teorem 26
Polarna projekcija 134
Polarni trobridi 139
Polijedri 60
Polovi 117, 121
Poncelet J. V. 164
Pozornica 163
Pramen zrakâ 3 (9), 150, 157
Prava sjena 44 (5)
Prava veličina 9, 20, 33, 58, 154
Preloženje ravnine 17, 52, 154
Prerezi tjelesa 89, 122
Presijecanje nizovima 159
Presječnica 3 (12), 38 (2), 42, 151
Preslikavanje 164
Pridjeljenje elemenata (projektivitet) 164
Priklonica 6 (4), 13, 14, 17, 48, 82, 94, 152
Prikloni kut 6, 9, 20, 35, 48, 56, 58, 82, 152
Prikraćeni stožac 79
Prikrata 23
Pripadne zrake i točke 157
Prizma 16, 21, 22, 45, 60, 61, 155
Probodište 3 (11), 9, 14 (c), 35, 37 (3), 43, 151
Prodori 108, 125
Profil 12
Projekcija 1 (1), (2), (3), 6
Projektivna geometrija 158, 164
Projektivna srodnost 158
Projektivni odnosi 1
Projiciranje 1
Projiciranje pramenima 159
Projektivitet 158
Prometalica 12, 22
Prostorni kut 6 (3)
Pružac 3 (1), 8, 9, 19
Ptolemej 131, 163
Rastavnice 44 (6), 84 (1), 86
Ravnina (određenje likovima) 21
Ravnina slike 141
Ravnina svjetlosti 44 (2), 84
Raznosmjerni pravci 3 (4), 10, 36
Relijefna perspektiva 163
Rombički dodekaedar 27
Romboedar 68
Rotacija 57
Rotacione površine 120
Samosjena 44

Sferni trokut 122, 138, 139
Sferoid 120, 121
Sintetička geometrija 158, 164
Sinusov poučak 139
Sinusova crta 166
Sjekotine stošca 99, 135, 161, 164
Sjene 44, 74, 75, 106, 128, 129, 130
Slični nizovi, zad. 493.
Slobodna perspektiva 140, 149
Složena tjelesa 32, 69, 81, 88
Spirala cilindrička 166
Sporedna točka 153
Središte projiciranja 1 (3), 140, 149
Steiner J. 164
Stereografska projekcija 131, 163
Stereometrijski poučci 3
Stereoskopske slike 148
Stereotomija 163
Stožac 14, 20, 37, 77, 80, 99, 135, 155
Strane neke ravnine 37 (2)
Stranocrt 31, 32
Sumjerenosti ravnina, zad. 122.
Sunčane ure 165
Sutražnica 3 (15), 13, 40
Svežanj ravninâ 3 (10)
Svjetska os 165
Tangencijalna ravnina 82—5, 126
Tangenta 70, 83, 89
inflexiona 94, 70, 101
Tangenta krivulje 2. reda 162
Temeljni elementi dvoomjera 159
Tetraedar 25, 60; zad. 60., 200.
Tjeme parabole 99
Točke distancije 141
Topografska karta 8
Torus 120, 124
Tračna tjelesa 60, 89, 108
Trag 3 (12), 13, 39, 150
Transformacije 30, 31, 32, 51 (a), 91
Treća ravnina projekcija (stranocrt) 30, 31, 32, 51 (a), 91
Trobrid 138, 139
Ubaldo G. 163
Udružene normalne projekcije 18, 163
Uglasta tjelesa 60
Usporednik 117, 120, 134
Valjak 76, 80, 95, 93, 94
Vertikala 141
Vertikalna projekcija 18
Vertikalna sunčana ura 165
Vidni stožac 140
Visina zavoja (spirale) 166
Vitruvij P. 163.
Zavojna površina 166.

Prvi dio.

Uvod.

1. Zadaća opisnog mjerstva. Neki zadatak, koji se tiče tijela u prostoru, može se razriješiti računom ili konstrukcijom. Ako na pr. treba odrediti oplošje neke piramide, moći će se mjerenjem izračunati površine svih pobočaka i osnovke; konačno će se dobiti neki broj u kvadratnim jedinicama (m^2, cm^2, . . .), kojim se prikazuje veličina oplošja. No piramida se može zamisliti prikazana crtnjom, a onda razrezana po svim svojim bridovima tako, da se sve pobočke mogu razastrti u ravninu osnovke; veličina oplošja bit će prikazana mrežom piramide; do te mreže možemo dakle doći čistom konstrukcijom bez pomoći računa.

Kod konstrukcije dolazi u obzir: 1. skup svih pravila, koja se imaju upotrebiti u rješenju zadataka, 2. način, kojim će se prostorni oblici i odnosi predočiti i dalje izvesti crtnjom u ravnini.

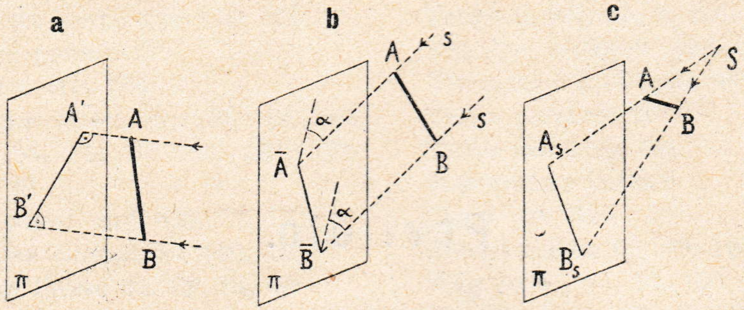
Poradi upotrebe različnih pravila treba točno poznavati stereometrijske poučke o točkama, pravcima, ravninama, o priklonim kutovima, i t. d. Za predočivanje pak i za izvođenje crtnje u ravnini potrebno je poznavanje načina, kojim se prostorni oblici posve točno naknađuju ravničnim oblicima i njima rješavaju zadaće o prostornim odnosima.

Taj se drugi dio zadatka postizava t. zv. projiciranjem (od latinske riječi projicere = prometnuti, prebaciti). U ovoj će se knjizi upotrebiti za projiciranje tri glavna načina:

1. Normalno ili ortogonalno projiciranje (slika 1. a). Iz neke točke A prostora spustit će se normala na neku čvrstu ravninu Π; nožište je normale točka A', koja se zove normalna projekcija točke A na ravninu Π. Isto to vrijedi za druge točke B, C, ..., prostora.

2. Koso projiciranje (klinogonalno projiciranje) (slika 1. b). Tu se nekom točkom A prostora ne će povući normalan pravac prema čvrstoj

ravnini Π, nego kos pravac s pod kakvimgod kutom α, koji onda za cijelo projiciranje ostaje isti. Pravac će s sjeći Π u kosoj projekciji $\bar{A}$ točke A.



Slika 1.

3. Centralno projiciranje (perspektivno preslikavanje). Tu će se (slika 1. c) svaka točka A prostora spojiti s čvrstom točkom (centrom) S, pa će se odrediti probodište te spojnice s nekom čvrstom ravninom Π; probodište je A_s perspektivna slika točke A s obzirom na centar S.

U opisnom se mjerstvu (ili deskriptivnoj geometriji) pokazuje, kako se imaju projekcijama u ravnini predočiti prostorne tvorevine, pa kako se pitanja, koja se tiču prostornih odnosa tih tvorevina, mogu razriješiti s pomoću „projekcija" čistom konstrukcijom.

Bilješka. Često se crtaju najprije projekcije nekoga tijela, pa se onda istom sastavlja tijelo na temelju tih projekcija. To se redovno čini u graditeljstvu i u tehnici strojevâ.

Geometrijski odnosi tvorevinâ mogu biti takovi, u kojima se radi samo o položaju, o presijecanju i o sastavljanju pojedinih elemenata. Može se na pr. raditi o položaju pravca prema kakvojgod nepravilnoj piramidi, ili o presjeku takve piramide s ravninom, ili o sastavljanju piramide, od koje je zadana osnovka i određen vrh. Ti odnosi ne iziskuju nikakvih mjerenja pa se zovu projektivni odnosi.

Naprotiv ima odnosâ, u kojima dolaze određenja dužinâ, kutova, priklonih kutova, udaljenosti i t. d. Tu se radi na pr. o pravoj veličini prušca, o kutu dvaju pravaca, o priklonom kutu dviju ravnina, o daljini točke od ravnine i t. d. Takvi se odnosi zovu metrički odnosi. Među te odnose pripada i usporednost (paralelizam), jer zavisi o jednakim kutovima ili o jednakim udaljenostima.

Svaka zadaća o tvorevinama u prostoru može se svesti na neki broj najjednostavnijih zadaća, koje se zovu temeljne zadaće. Tih zadaća nema mnogo; njihovo je točno poznavanje za rješavanje različnih problema veoma znatno, a u najužoj su svezi sa stereometričkim poučcima.

2. Obilježenje elemenata u opisnom mjerstvu. Prostorni geometrijski elementi jesu: točka, pravac i ravnina; iz njih postaju druge tvorevine: kut, ravni lik, krivulja, površina, tijelo. Elementi neke tvorevine označuju se slovima; uz projekciju elementa meće se isto slovo, pa mu se dodaju još osobiti znakovi, na pr. ', ili ", ili ''' i t. d.

Projekcijom i oznakama opisuje se dakle prostorna tvorevina, o kojoj se radi, zato se naša nauka zove opisno mjerstvo ili deskriptivna geometrija (lat. descriptio = opisivanje).

Točke u prostoru opisuju se velikim latinskim slovima, na pr. A, M, T, i t. d.; njihove će projekcije biti označene s A', M', T', ili A'', M'', T'', $\bar{A}$, T_s i t. d.

Pravci se bilježe malim latinskim slovima e, l, p, njihove projekcije s e', l', p', ili e'', l'', p'', $\bar{e}$, p_s i t. d.

Ravnine i oble površine bilježe se malim ili velikim grčkim slovima: α, λ, μ, . . ., Γ, Δ, Φ i t, d.

Tvorevina, koja postaje iz dva elementa, može se u tumačenju (ne u crtežima!) pobliže označiti slovima tih elemenata; tako na pr. $[p, \alpha]$ znači točku, u kojoj pravac p siječe ravninu α; $[r, s]$ znači ravninu, koja je položena pravcima r i s (koji se sijeku); $[(\alpha, \beta), P]$ znači ravninu, koja ide presječnicom ravninâ α i β, te točkom P i t. d.

Trag ravnine, obilježene grčkim slovom (na pr. ρ), bilježit će se pripadnim latinskim slovom i kazalom (r_1, ili r_2).

Neki osobiti znakovi, kao A*, (Q), S_0, H_1 i dr., rastumačit će se u odsjecima, u kojima se upotrebljavaju.

Znak $\equiv$ znači „identično"; taj se znak meće među obilježja dviju tvorevina, koje posve isto znače, a obilježene su različno. Tako na pr. $\alpha \equiv ABC$ kaže, da se neka ravnina, koja se ukratko obilježuje s α, podudara s ravninom, koja je određena točkama A, B i C.

Stereometrijski odnosi i poučci.

3. Općeni projektivni odnosi. Takvi će odnosi nastati, ako dovedemo temeljne elemente: točku, pravac i ravninu među sobom u svezu, koja se tiče spajanja ili presijecanja.

1. Dvije točke A i B određuju pružac; produži li se pružac na obje strane, preko točke A i preko B, nastaje neomeđen pravac; produži li se pružac samo na jednu stranu, na pr. preko točke B, nastat će zraka, koja izlazi iz točke A.

Bilješka. Pružac će se obilježiti s AB, a dužina s $\overline{AB}$. „Pružac" znači komad pravca, koji je s dvije strane omeđen; „dužina" znači veličinu udaljenosti dviju točaka A i B. Zato se može govoriti o „dužini prušca".

*

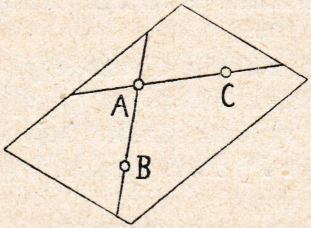
2. Tri točke A, B, C određuju ravninu $\alpha \equiv ABC$, ako nijesu na istom pravcu.

3. Pravac je sav u ravnini, ako su dvije njegove točke u ravnini.

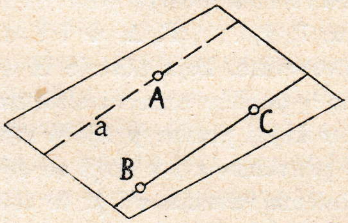
4. Spojimo li u ravnini ABC točke A i B, pa onda A i C u pravce, dobit ćemo dva pravca AB i AC, koji se sijeku (u točki A) i koji određuju ravninu ABC (slika 2.). Pravci, koji imaju zajedničku točku (kao AB i AC), zovu se raznosmjerni.

5. Spojimo li u ravnini ABC točke B i C u pravac, bit će ista ta ravnina određena pravcem BC i točkom A (slika 3.).

6. Spojimo li u ravnini ABC točke B i C u pravac, a točkom A povučeno usporednicu (paralelu) a s pravcem BC, vidimo, da je ravnina određena i paralelnim pravcima a i BC (sl. 3.).

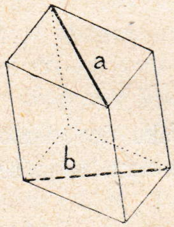


Sl. 2.

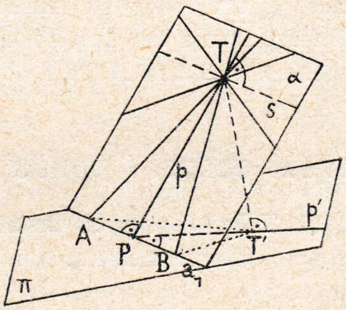


Sl. 3.

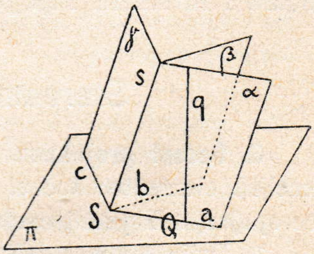
7. Dva su pravca a i b mimosmjerna, ako se ne sijeku niti su paralelni (slika 4.); takovim se pravcima ne može položiti ravnina.



Sl. 4.



Sl. 5.



Sl. 6.

8. Točka se može gibati po pravcu p; na tome pravcu nastaje onda niz točaka, za koji je pravac p „nosilac“.

9. Pravac se može gibati oko točke T u ravnini α (slika 5.); tako nastaje u ravnini pramen zrakâ, kojemu je točka T središte.

10. Ravnina se može okretati oko pravca s; tako nastaje svežanj ravninâ, kojemu je pravac s os (slika 6.).

11. Pravac s siječe uopće ravninu Π u točki S, koja se onda zove probodište pravca s ravninom Π (sl. 6.).

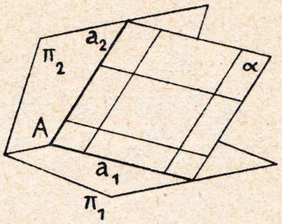
12. Dvije ravnine α i Π sijeku se uopće u pravcu a, koji se onda zove presječnica tih ravnina. Kaže se često, da je pravac a trag ravnine α na ravnini Π (sl. 6.).

13. Polože li se pravcem s ravnine α, β, γ, . . . , (sl. 6.), sjeći će sve neku čvrstu ravninu Π u pravcima (tragovima) a, b, c, . . . Svi će ti pravci prolaziti probodištem S pravca s s ravninom Π.

14. Ako neka ravnina α siječe ravninu Π u pravcu a, bit će probodišta Q svih pravaca q, koji su u ravnini α, na pravcu (tragu) a (sl. 6.).

15. Tri ravnine Π_1, Π_2 i α (slika 7.) sijeku se u točki A, t. j. u probodištu ravnine α s presječnicom (Π_1, Π_2). Točkom A prolaze tri presječnice $(\Pi_1 \Pi_2)$, $(\Pi_1 \alpha)$ i $(\Pi_2 \alpha)$. Ravnina α siječe ravnine Π_1 i Π_2 u tragovima a_1 i a_2. Svaki pravac u ravnini α, koji je paralelan s tragom a_1 ili s tragom a_2, zove se sutražnica ravnine α za trag a_1 dotično za trag a_2.

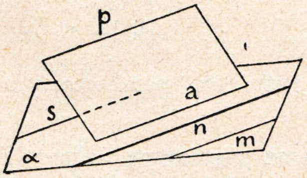
4. Usporednost (paralelizam) pravaca i ravninâ. Kako se u planimetriji govori o usporednim (paralelnim) pravcima u ravnini, tako se u stereometriji može govoriti o pravcu, koji je paralelan s ravninom, ili o paralelnim ravninama.



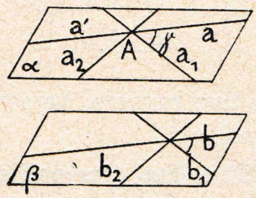
Sl. 7.

1. Pravac je p paralelan s ravninom α, (slika 8.), ako je paralelan s nekim pravcem a te ravnine. Pravac je p ujedno paralelan sa svim pravcima m, n, s ravnine α, koji su paralelni s pravcem a.

2. Dvije su ravnine α i β paralelne (slika 9.), ako se u α mogu naći dva raznosmjerna pravca a i a_1, a u ravnini β dva pravca b i b_1 tako, da je $a \parallel b$ i $a_1 \parallel b_1$.



Sl. 8.

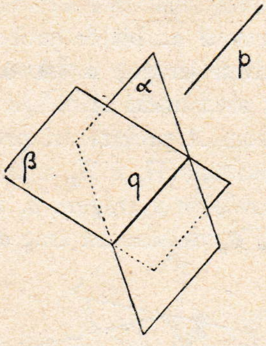


Sl. 9.

3. Točkom A u prostoru može se položiti samo jedna ravnina α, koja je paralelna s nekom zadanom ravninom β (sl. 9.).

Točkom se A može položiti više pravaca, $a, a_1, a_2, \ldots$, koji su paralelni s pravcima b, b_1, b_2 ravnine β. Svi će pravci $a, a_1, a_2, \ldots$, biti u istoj ravnini $\alpha \parallel \beta$. Kutovi su (aa_1) i (bb_1) u istome smislu paralelni kutovi i t. d. Svi pravci ravnine α paralelni su s ravninom β.

4. Za mimosmjerne se pravce a_1 i b kaže, da su priklonjeni pod nekim kutom γ. Povuče li se kojomgod točkom A na a_1 paralela a' s b, bit će šiljast kut, što ga čine pravci a' i a_1, kut γ mimosmjernih pravaca (sl. 9.). Točka se A može izabrati i izvan a_1, pa se onda njom mogu položiti paralele s a_1 i s b, koje određuju kut γ.



Sl. 10.

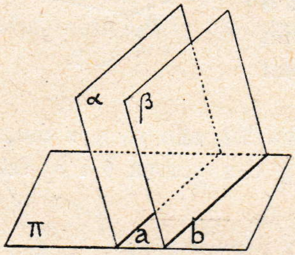
5. Ako su p i q dva paralelna pravca, bit će svaka ravnina $\alpha, \beta, \ldots$, položena pravcem q, paralelna s p (slika 10.). Isp. § **4.**, *1.*

6. Pravac p, koji je paralelan s dvije ravnine α i β, paralelan je s njihovom presječnicom q (sl. 10.).

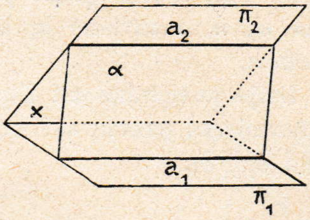
7. Dvije paralelne ravnine α i β sijeku treću ravninu Π u pravcima (tragovima) a i b, koji su paralelni (slika 11.).

8. Ravnina α, koja je paralelna s presječnicom x dviju ravnina Π_1 i Π_2, siječe te ravnine u pravcima (tragovima) $a_1 \parallel a_2 \parallel x$ (slika 12.).

9. Položi li se svakim od dva paralelna pravca a_1 i a_2 po jedna ravnina Π_1 i Π_2, bit će presječnica x tih ravnina paralelna s a_1 i a_2 (sl. 12.).



Sl. 11.



Sl. 12.

10. Sve ravnine, koje su s jednom ravninom paralelne, paralelne su i među sobom.

5. Okomitost (normalitet) pravaca prema ravninama. Okreće li se jedan krak a pravoga kuta oko drugoga kraka p, opisat će a ravninu Π, koja je okomita (normalna) na pravcu p. Pravac je p okomica (normala) ravnine Π. Probodište P ravnine Π s normalom p zove se nožište normale p.

1. Pravac je p okomit na ravnini Π, ako je okomit na svim pravcima, koji su u ravnini Π, a idu nožištem P pravca p.

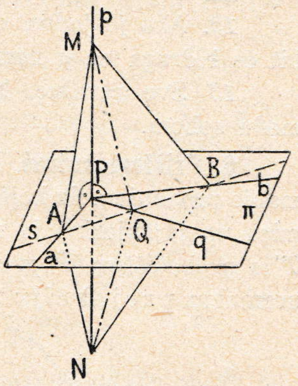
2. Ako je pravac p okomit na dva pravca a i b ravnine Π, koji idu nožištem P pravca p, onda je on okomit na s v a k o m pravcu ravnine, koji ide nožištem P (s l i k a 13.).

Učini li se na pravcu p $\overline{PM} = \overline{PN}$ pa se povuče kojigod pravac s u π, koji siječe a i b u A i B, bit će $AM = AN$, $BM = BN$, dakle $\Delta\ AMB \cong \Delta\ ANB$. Za svaku točku Q na s bit će $QM = QN$, a trokut je MQN istokračan. Spojnica je njegova vrha Q sa sredinom P osnovke MN o k o m i t a na toj osnovci, dakle na pravcu p.

3. Iz točke M prostora može se na ravninu Π spustiti samo jedna okomica (sl. 13.).

Hipotenuze MA, MB, MQ . . . sve su veće od katete MP. Svi su dakle kutovi MAP, MBP, MQP manji od 90^0.

4. Točkom A može se na pravac p položiti samo jedna okomita ravnina Π (sl. 13.).

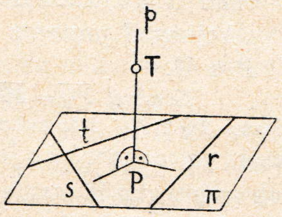


Sl. 13.

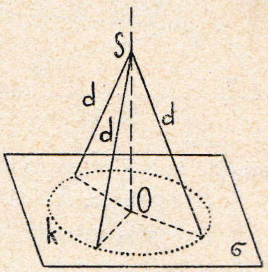
5. Pružac TP na okomici p ravnine Π, kojemu je jedan kraj neka točka T na p, a drugi kraj nožište P okomice, zove se d a l j i n a točke T od ravnine Π (s l i k a 14.).

6. Svi pravci r, s, t, . . ., u ravnini Π čine s nekom normalom p te ravnine prave kutove (isp. § **4.**, *4.*).

7. Sve jednake dužine d, kojima je jedan kraj u točki S prostora, a drugi kraj u ravnini σ, čine uspravan kružni stožac. Krajevi tih dužina, koji su u σ, određuju kružnicu: središte je O te kružnice nožište okomice, spuštene iz S na ravninu σ. (S l i k a 15.).



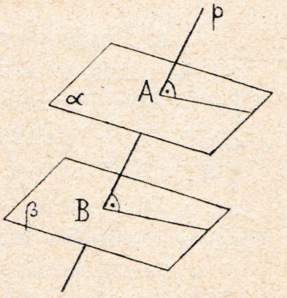
Sl. 14.



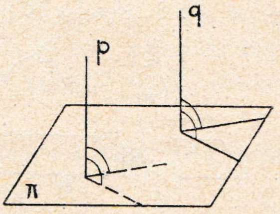
Sl. 15.

8. Sve točke pravca p, koji je paralelan s ravninom Π, imaju od te ravnine jednake daljine (daljina pravca od ravnine).

9. Sve točke ravnine α, koja je paralelna s ravninom β, imaju od β jednake daljine (udaljenost dviju ravnina); u s l i c i 16. ta je udaljenost jednaka $\overline{AB}$, pa je $AB \perp \alpha$ i $AB \perp \beta$.



Sl. 16.



Sl. 17.

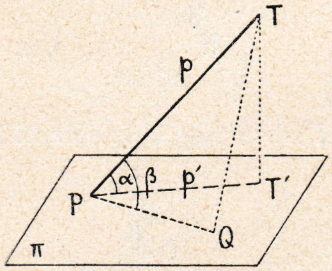
10. Ako je jedan od pravaca $p \parallel q$ okomit na ravnini Π, bit će i drugi okomit na Π (slika 17.).

11. Sve normale iste ravnine jesu paralelni pravci.

12. Ako je jedna od paralelnih ravnina α, β normalna na pravcu p, bit će i druga na p normalna (sl. 16.).

13. Sve ravnine, koje su normalne na istome pravcu, paralelne su među sobom.

6. Prikloni kutovi. Pravac p može biti prema nekoj ravnini Π više ili manje priklonjen. Iz kojegod točke T pravca p (slika 18.) spustit ćemo okomicu na Π; njezino je nožište T' projekcija točke T na Π. Spojimo li T' s probodištem P pravca p i ravnine Π, dobit ćemo u pravcu $PT' \equiv p'$ normalnu projekciju pravca p na ravninu Π.



Sl. 18.

1. Prikloni je kut α pravca p s ravninom Π onaj kut, koji čini p sa svojom normalnom projekcijom p' na Π (sl. 18.). Dva paralelna pravca imaju jednake priklone kutove s istom ravninom Π. Zašto?

2. Prikloni je kut pravca p prema ravnini Π najmanji kut, što ga može činiti p s kojimgod pravcem PQ, koji ide probodištem P u Π.

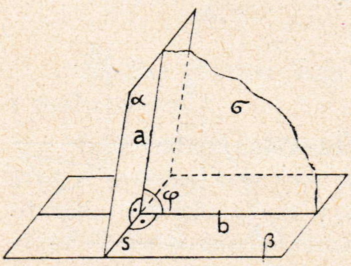
Učinimo $\overline{PQ} = \overline{PT'}$, bit će $TQ > TT'$. Za kutove β i α, koji su suprotni stranicama TQ i TT' u trokutima TQP i $TT'P$, bit će $\beta > \alpha$.

Sve dužine d u sl. 15. imaju prema ravnini σ jednaki prikloni kut. Zašto?

3. Dvije ravnine α i β mogu biti više ili manje priklonjene jedna drugoj. Taj se priklon zove prostorni kut ili klin.

Veličina priklona dviju ravnina α i β mjeri se tako, da se na njihovu presječnicu s postavi normalna ravnina σ (slika 19.), koja siječe α u a, β u b. Šiljasti kut φ pravaca a i b mjera je za veličinu priklona ravninâ α i β.

Budući da je $s \perp \sigma$, bit će $s \perp a$ i $s \perp b$. — Suplement kuta φ zove se suplement prostornoga kuta (α β).



Sl. 19.

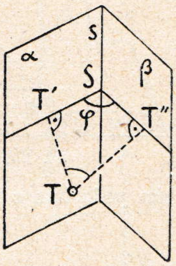
4. Ravnina α siječe Π u tragu a_1 (sl. 5.). Izabere li se u α kojagod točka T, pa se njom povuče paralela s s tragom a_1, dobit će se sutražnica ravnine α (gl. § **3.**, *15*). Povuče li se pak kroz T okomica na a_1 (dakle i na s), dobit će se priklonica p ravnine α za točku T.

Učini li se na a_1 $PA = PB$, bit će trokut TAB istokračan. Spoji li se projekcija T' točke T s A i B, bit će i trokut $T'AB$ istokračan. Pravokutni su naime trokuti $TT'A$, $TT'B$ sukladni (hipo-

tenuze su jednake, a kateta im je TT' zajednička). Bit će dakle $T'A = T'B$. Poradi toga je $T'P \equiv p' \perp a_1$.

Prikloni je **kut** ravnine α prema Π onaj, što ga čini kojagod **priklonica** p ravnine α s ravninom Π. Dvije paralelne ravnine imaju jednake priklone prema Π. Zašto?

Projekcija p' priklonice okomita je na a_1, a i sama je priklonica $p \perp a_1$. Pravci p i p' čine dakle prikloni kut ravninâ α i π (§ **6.**, *3.*).



Sl. 20.

5. Svaka ravnina σ, položena okomito na presječnicu s ravninâ α i β (sl. 19.), određuje **isti** priklon ravninâ α i β.

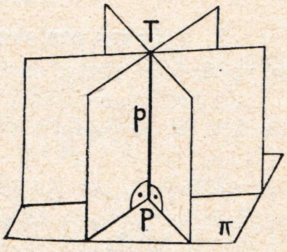
6. Spuste li se iz neke točke T prostora normale TT' i TT'' na ravnine α i β (slika 20.), zatvarat će obje kut, koji je jednak suplementu priklonoga kuta γ ravninâ α i β.

Ravnina σ, položena normalama TT' i TT'', siječe s u S; četverokut $TT'ST''$ ima dva prava kuta!

7. Ako je prikloni kut dviju ravnina α i β jednak 90^0, kaže se, da su ravnine α i β **normalne** ili **okomite** jedna na drugoj ($\alpha \perp \beta$).

7. Okomite (normalne) ravnine.

1. Položi li se pravcem p, koji je okomit na ravnini Π, kakvagod ravnina, svaka će biti okomita na ravnini Π (slika 21.).



Sl. 21.

2. Nekom točkom T prostora može se položiti bezbroj ravninâ, koje su okomite na nekoj ravnini Π (sl. 21.). Isp. § **5**, *3.* i § **7.**, *1.*

3. Točkom P, koja je u ravnini Π (sl. 21.), može se položiti bezbroj ravnina, koje su okomite na Π. Sve se sijeku u pravcu p, koji je okomit na Π.

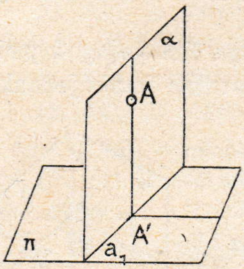
4. U točki P ravnine Π može se na tu ravninu uzdignuti samo jedna normala (sl. 21.).

5. Ako je ravnina α normalna na ravnini Π, bit će normala, spuštena iz neke točke A ravnine α na ravninu Π, posve sadržana u ravnini α (slika 22.), pa će joj nožište A' biti na tragu a_1 u Π.

6. Pravcem p, koji ne stoji normalno na ravnini Π (sl. 18. i 5.), može se položiti samo **jedna** normalna ravnina na Π. To je ona ravnina, koja je određena pravcem p i njegovom normalnom projekcijom p' na Π (na pr. priklonica i njezina projekcija).

7. Ravnina σ, koja je normalna na dvije ravnine α i β (sl. 19.), normalna je na presječnici s tih ravnina.

8. Položi li se svakim od dvaju paralelnih pravaca m i n normalna ravnina α i β na neku ravninu Π, bit će obje ravnine α i β paralelne.



Sl. 22.

Ravnine α i β ne mogu se sjeći, jer bi se inače na njihovoj presječnici sjekla oba pravca m i n, no oni se ne mogu sjeći, jer su paralelni.

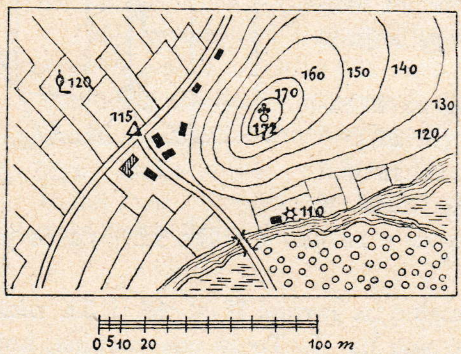
Bilješka. Stereometrijski su osnovni poučci prikazani i dokazani u XI. knjizi Euklidovih Elemenata (oko 300. g. pr. Kr.), u kojima je u 15 knjigâ prikazana građa osnovâ geometrije. Sav kasniji razvoj geometrije ima svoje temelje u Euklidovim Elementima. Osim toga bavio se Euklid još i naukom o perspektivi i o krivuljama 2. reda. — Kako se napose kasnije razvila deskriptivna geometrija (opisno mjerstvo), o tome gledaj na koncu ove knjige među historijskim podacima o našoj nauci.

Prvi odsjek.

Temelji projiciranja paralelnim zrakama.

I. Normalno projiciranje na jednu ravninu.

8. Kotirana projekcija točke i prušca. Na topografijskim kartama, kojima se predočuju manji dijelovi zemaljske površine (slika 23.), vidimo pojedine točke, označene brojem (na pr. △ 115), pa različne nepravilne krivulje, uz koje stoje brojevi, na pr. 170, 160, 150, 140, 130, 120 i t. d. Takvim se predočivanjem hoće reći, da se ona točka △ 115 uzdiže u prostoru 115 m vertikalno nad nekom horizontalnom ravninom, koja se zove osnovna ravnina (za tu se ravninu uzima i razina mora). Krivulja, označena na karti brojem, na pr. 170, znači, da svaka njezina točka ima u prirodi istu visinu 170 m nad osnovnom ravninom Π. Broj, koji pokazuje vertikalnu visinu nad ravninom Π, zove se kota.

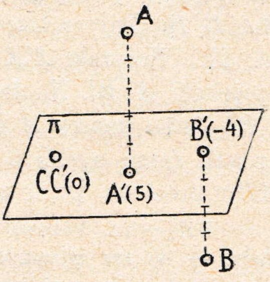


Sl. 23.

Ako se iz neke točke A prostora spusti normala na osnovnu ravninu, moći ćemo nožište normale obilježiti s A' ili s kojimgod posebnim znakom; takvo se nožište zove normana projekcija točke A na ravninu Π. Uz

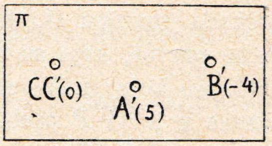
projekciju se bilježi i kota točke A, na pr. A' (5). Topografska karta znači dakle same takve normalne projekcije točaka i crtâ u prostoru na osnovnu ravninu, samo je ta karta nacrtana u manjem mjerilu, negoli je mjerilo na pravoj osnovnoj ravnini (na pr. na razini mora). Zato se takvoj karti uvijek dodaje „mjerilo umanjenja".

Kad se radi samo o geometrijskim prostornim tvorevinama, zove se ravnina Π: ravnina projekcijâ; ona je ujedno ravnina crtnje (papir, na kojem se crta). Projekcije, koje nastaju prikazanim načinom, zovu se kotirane projekcije.



Sl. 24.

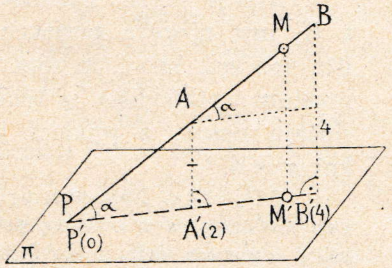
Točka B prostora može se nalaziti i ispod osnovne ravnine, na pr. točka u dubljini mora, ili kod geometrijskih prikazivanja ispod ravnine crtnje; u tome se slučaju dodaje koti točke B' znak „minus", na pr. B' (—4), kao u slici 24. Točka C, koja je u ravnini Π, pada zajedno sa svojom projekcijom C', pa ima kotu 0.



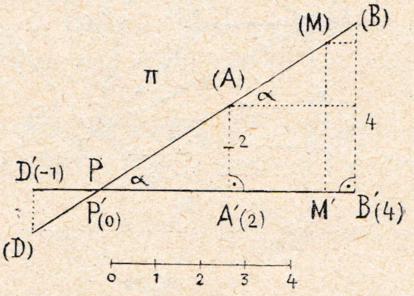
Sl. 25.

U koso prikazanoj slici 24. nije ravnina Π, na koju se projicira, ujedno ravnina crtnje (list ove knjige); ako se pak Π namjesti zajedno s projekcijama A', B', C', . . . u našu ravninu crtnje, dobit će se slika 25., koja posve odgovara odnosima u sl. 24. Tu su okomice AA', BB' . . ., uklonjene. Iz samih projekcija i njihovih kota u sl. 25. može se razabrati položaj točaka A, B, C u prostoru. Takvo je prikazivanje osobito pregledno onda, ako se pojedine kote ne razlikuju znatno među sobom.

Bilješka. Kotirane je projekcije za točke jednakih morskih dubljina prvi upotrebio geograf Filip Buache (u prvoj polovini 18. vijeka). Kasnije su se počele upotrebljavati krivulje jednako visokih točaka (*niveau*-krivulje) i za predočivanje bregova (gl. sl. 23.).



Sl. 26.



Sl. 27.

Pružac $\overline{AB}$ u prostoru imat će za projekciju pružac $\overline{A'B'}$; u slici 26. prikazan je pružac AB kotiranom projekcijom A' (2) B' (4). Kraj B prušca

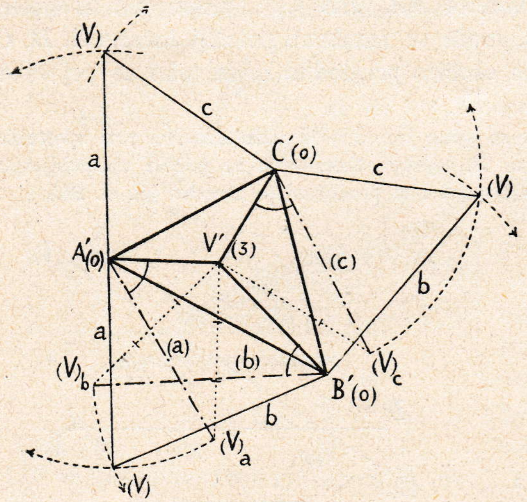
viši je nad Π negoli kraj A. Ravnina $ABB'A'$ sadržava dvije normale AA', BB' ravnine Π; ta je dakle ravnina normalna na Π (isp. § **7.**, *1, 5*), a pravac je $A'B'$ njezin trag na toj ravnini.

9. Prava dužina prušca. Probodište. Prikloni kut. Pružac AB u prostoru (sl. 26.) i njegova normalna projekcija $A'B'$ na Π određuje trapez $AA'B'B$. Taj se trapez može oko stranice $A'B'$ prevrnuti u ravninu Π (sl. 27.). Normale $A'A$ i $B'B$ ostat će i poslije zaokreta u Π normalne na projekciji $A'B'$. Na te će se prevrnute normale prenijeti od projekcijâ A' i B' visine točaka A i B nad Π, t. j. kote 2 i 4. Dobivene krajne točke označit ćemo s (A) i (B). Dužina je $(A)(B)$ ona ista, koju ima pružac AB u prostoru, pa se zato zove prava dužina (ili veličina) prušca AB.

Bilješka. Veličina je projekcije $A'B'$ uopće manja od veličine prušca AB u prostoru. — Za sva mjerenja horizontalnih udaljenosti (na pr. $A'B'$) upotrebit ćemo isto mjerilo kao i za vertikalne daljine nad π, premda bi obadva mjerila mogla biti i različna.

Produži li se preložaj $(A)(B)$, dok ne siječe produženje pravca $A'B'$, dobit će se točka $P \equiv P'$, koja ima kotu 0. To je točka pravca, u kojoj on probada ravninu Π, dakle njegovo probodište P s tom ravninom. Sve točke pravca, koje su na istoj strani probodišta P, kao i A i B, imaju pozitivne kote; točke na protivnoj strani od P imaju negativne kote, jer pravac u točki P prelazi s gornje strane nad ravninom Π u donji dio prostora ispod Π. Tako ima točka D u sl. 27. kotu —1.

Kut, što ga čini pružac BP (sl. 26.) sa svojom projekcijom $B'P'$ na Π, nazvali smo priklonim kutom toga pravca s ravninom Π (isp, § **6.**, *1*).



Sl. 28.

Taj se kut preloženjem prušca u ravninu Π ne mijenja (sl. 27.). Preloženjem se dakle dobiva prava veličina prušca, njegovo probodište i njegov prikloni kut s ravninom projekcijâ Π.

Ako je pružac paralelan s Π, ima njegova projekcija istu veličinu, kao i on sâm u prostoru; probodišta u tome slučaju nema, a prikloni je kut $\alpha = 0$.

Bilješka. Neomeđen pravac predočuje se u kotiranoj projekciji s pomoću dviju njegovih točaka i njihovih kota.

U slici 28. prikazana je kotiranom projekcijom nepravilna trostrana piramida, kojoj je osnovka ABC u ravnini projekcijâ Π, a vrh joj V

ima kotu 3. Da se odredi prava veličina brida VA ili a, preložit će se taj pružac onako, kako je sprijeda istumačeno; kod toga treba paziti na to, da je krajna točka A toga prušca u ravnini Π, pa da joj je kota 0. Preloženjem brida a oko $A'V'$ u $A'(V)_a$ dobio se odmah i prikloni kut njegov prema ravnini osnovke zadane piramide. Na posve isti način dobivaju se prave dužine i prikloni kutovi ostalih dvaju bridova b i c. Pobočni trokuti piramide mogu se sad sastaviti, jer su od svakoga poznate prave dužine stranicâ. U slici su ti trokuti nadovezani na osnovku tako, kao da je piramida razrezana po bridovima, pa da su onda pobočke zaokrenute u osnovnu ravninu. Osnovka i tri pobočna trokuta u Π čine mrežu piramide. Svi se kutovi pobočnih trokuta vide u pravoj veličini.

Zadaci za vježbu.

1.) Koliku kotu ima točka, kojoj je poznata projekcija M' na $A'B'$ u sl. 26. i 27.?

2.) Odredi na prušcu AB (sl. 27.) točku C projekcijom C', ako je kota te točke 2·8.

3.) Prikaži u kotiranoj projekciji pružac $MN = 6$, ako je on paralelan s Π u udaljenosti — 3.

4.) Prikaži u projekciji pružac $PQ = 7$, normalan na Π, tako da mu točka P ima kotu 3.

5.) Na pružac RS, koji je zadan projekcijom R' (2·5), S' (5·5), $\overline{R'S'} = 6$, prenesi od točke R prema S dužinu $d = 3{\cdot}2$ i odredi projekciju dobivene krajne točke T.

6.) Zašto će se promijeniti prava veličina i prikloni kut prušca, a ne će se promijeniti probodište, ako promijenimo mjerilo za kote?

7.) Odredi na bridovima piramide u sl. 28. po jednu točku, i to na bridu a točku F s kotom — 2, na b točku G s kotom 1·5, a na c točku H s kotom — 1, pa prikaži trokut FGH u projekciji.

8.) Zadana je projekcija $A'B' = 6$ prušca AB; točka A ima kotu 3. Koliku kotu mora imati točka B, ako je prikloni kut prušca $\alpha = 30^0$?

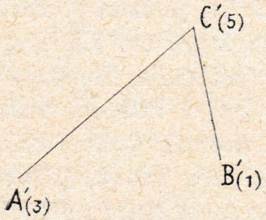
9.) Točkom L prostora, koja ima kotu 7, položi u kojemgod smjeru pružac, kojemu će druga krajna točka biti u Π, a prikloni mu je kut $\alpha = 60^0$, pa prikaži sve to u projekciji.

10.) Kako se može računom odrediti prava veličina prušca, za koji je poznata dužina projekcije s kotama krajnih točaka? (Pitagorin poučak). Uzmi kote 6 i 2·5, a za dužinu projekcije 4.

11.) Pokaži, da je omjer, po kojemu točka C dijeli pružac AB, isti kao onaj omjer, koji određuju projekcije $A'C'$ i $C'B'$.

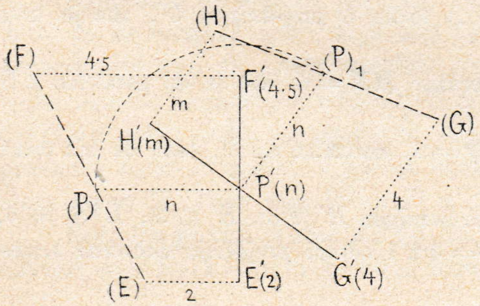
10. Dva pravca i njihove kotirane projekcije. Dva pravca u prostoru mogu imati zajedničku točku (kaže se, da se u toj točki sijeku), ili su paralelni, ili pak mimosmjerni (u tome se slučaju ne sijeku niti su paralelni).

U kotiranoj se projekciji predočuju dva pravca, koji se s i j e k u, tako, da se naznači njihova zajednička točka, pa da joj se pridoda ista kota s obzirom na jedan i drugi pravac. U s l i c i 29. zadane su projekcije dvaju pravaca $A'(3)$ $C'(5)$ i $B'(1)$ $C'(5)$. Točka im je dakle C zajednička, pa se pravci prema tome s i j e k u.

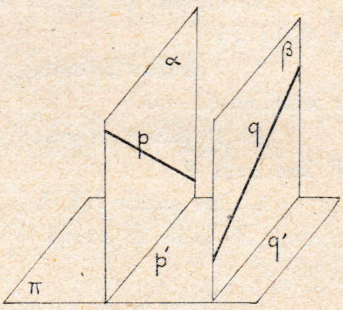


Sl. 29.

Ako su dva pravca EF i GH zadana svojim projekcijama (s l i k a 30.), pa treba ispitati, da li se sijeku, preložit će se EF oko svoje projekcije u $(E)(F)$, a GH oko $G'H'$ u $(G)(H)$; ujedno će se s prvim i drugim pravcem odrediti preložaj one točke, kojoj je projekcija P' u sjecištu projekcijâ $E'F'$ i G' H'. Ako su kote P' (P) i P' $(P)_1$ u oba preložaja j e d n a k e, na pr. n, onda je



Sl. 30.



Sl. 31.

točka P na jednome i na drugome pravcu: oba se pravca s i j e k u (raznosmjerni pravci; gl. **3.**, *4*). Ako je pak kota u jednom i drugom preložaju različna, pravci su uopće mimosmjerni.

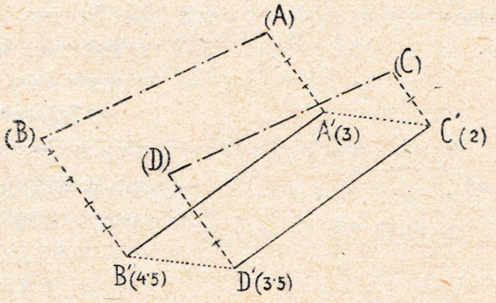
Dva p a r a l e l n a pravca (§ **3**., *6*) imaju paralelne projekcije. Svakim se naime pravcem može položiti po jedna normalna ravnina na Π; njihovi će tragovi biti projekcije obadvaju pravaca (gl, § **7.**, *6*). Budući da su obje te ravnine paralelne (isp. § **7.**, *8*), bit će paralelni i njihovi tragovi na Π (isp. § **4.**, *7*).

Obrnuto ne slijedi, da su pravci u prostoru paralelni, ako su njihove projekcije paralelne. U ravninama $\alpha \parallel \beta$ (s l i k a 31.), kojima se projiciraju pravci p i q, mogu ti pravci biti i tako namješteni, da su m i m o s m j e r n i.

Ako su zadane dvije paralelne projekcije $A'B'$ i $C'D'$ pravaca AB i CD, pa treba ispitati, jesu li oni u prostoru paralelni, preložit će se svaki n a i s t u s t r a n u oko svoje projekcije; ako su preložaji paralelni, bit će i

pravci u prostoru paralelni (isp. § **6.**, *1*) (slika 32.), inače su mimosmjerni.

Imaju li dva paralelna prušca AB i CD jednake dužine, bit će im i projekcije paralelne i jednake, a smjerovi $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{C'D'}$, u kojima se prušci uzdižu, isti; oba prušca određuju u prostoru paralelogram. Da su pravci u prostoru paralelni, raspoznaje se u ovome slučaju po tome, što je razlika kotâ za krajne točke jednoga prušca tolika, kolika je razlika za krajne točke drugoga prušca. Prušci, kojima su u sl. 32. projekcije A' (3) B' (4·5) i C' (2) D' (3·5) jednake i paralelne, zaista su paralelni u prostoru, jer je razlika kotâ za jedan i za drugi pružac 1·5.



Sl. 32.

Zadaci za vježbu.

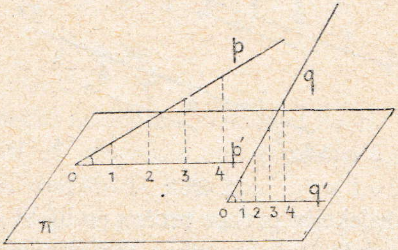
12.) U sl. 30. neka bude zadana projekcija E' (2) F' (4·5), pa G' (4) H' (?). Odredi kotu točke H tako, da se pravci EF i GH sijeku. Odredi najprije preložaj (P) i kotu n te točke, dalje preložaj $(P)_1$ za kotu n, a onda za H' kotu m.

13.) Točkom M' (3) povuci paralelu p s pravcem A' (2) B' (5); $A'B' = 4$, a M' je izvan $A'B'$. Kolika je kota točke N' na p', ako je $M'N' = 4$? (Smjerovi su $\overrightarrow{M'N'}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ isti!).

14.) Točkom N' (5) povuci pravac $n \parallel \Pi$, koji siječe A' (1) B' (3); $A'B' = 4$, a N' je izvan pravca $A'B'$.

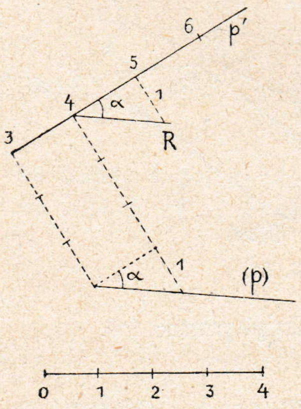
15.) Zadana je projekcija A' (3) B' (4) prušca AB, $A'B' = 5$; u tu istu projekciju pada projekcija drugoga pravca C' (5) D' (?), tako da je C' između A' i B'. Koliku kotu ima D', ako su pravci AB i CD paralelni?

11. Graduiranje pravca. Neka budu zadana dva prušca, za koje će krajne točke imati kote na pr. 0 i 4 (slika 33.). Projekcije tih pružaca na neku ravninu Π ne će uopće imati jednake dužine (nego samo onda, ako su prušci paralelni). Dva pravokutna trokuta, koja nastaju, imaju jednake vertikalne katete; prikloni su kutovi hipotenuzâ na p i q različni; manji je prikloni kut u onom trokutu, u kojem je veća horizontalna kateta (projekcija hipotenuze). Takav manji priklon ima u sl. 33. pružac na p.



Sl. 33.

Projekciju prušca (na p) možemo u sl. 33. razdijeliti u toliko jednakih dijelova, kolika je razlika kotâ njegovih krajnih točaka, dakle u četiri dijela. Svaka djelišna točka ima neku određenu kotu 0, 1, 2, 3, 4; kote dviju susjednih djelišnih točaka razlikovat će se za jedinicu. Ako kote krajnih točaka prušca nijesu cijeli brojevi, odredit ćemo u blizini tih točaka druge točke s kotama, koje su cijeli brojevi, a onda postupati isto tako kao i prije. Isto vrijedi i za q.



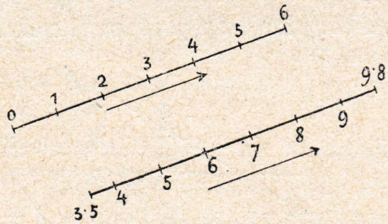
Sl. 34.

Dijelovi, koji se tim načinom dobivaju u projekcijama za dva pravca p i q (sl. 33.), bit će različni: oni će biti veći na projekciji onoga pravca, koji s ravninom projekcijâ Π čini manji prikloni kut i obrnuto. Kaže se, da je pravac tim postupkom graduiran; dijelovi u projekciji zovu se intervali.

Projekcija neomeđenoga pravca, koji je graduiran, određuje potpuno pravac u prostoru (slika 34.). Na projekciji p' pravca određeno je graduiranje 3, 4, 5, 6. Budući da se kote susjednih djelišnih točaka, na pr. 4 i 5 razlikuju za jedinicu, preložit ćemo maleni trokut, kojemu je jedna kateta $\overline{4\,5}$, a druga je jednaka jedinici (na mjerilu, koje pripada slici); hipotenuza $(\overline{4\,R})$ određuje s p prikloni kut pravca. Preloži li se pravac p s pomoću točaka, kojima su kote na pr. 3 i 4, dobit će se isti taj prikloni kut.

Bilješka. Mjerilo, dodano crtnji za dužine u ravnini π i za vertikalne udaljenosti nad ili pod ravninom π, nema s graduiranjem pravca ništa zajedničkoga. Graduiranje se odnosi na priklon pravca, dok se mjerilom određuju horizontalni i vertikalni razmaci. Ta se razlika između „mjerila" i „graduiranja" vidi već odatle, što je mjerilo za cijelu crtnju isto, dok se naprotiv intervali kod graduiranja mijenjaju od pravca do pravca u istoj crtnji.

Iz onoga, što je spomenuto o paralelnim pravcima (§ **6.**, *1*), izlazi, da će intervali na projekcijama takvih pravaca biti jednaki. Smjer, u kojem rastu kote krajnih točaka intervala, kod paralelnih je pravaca isti. Kakovi su pravci, ako su ti smjerovi različni?



Sl. 35.

U slici 35. zadane su projekcije dvaju prušaca krajnim točkama 0, 6 i 3·5, 9·8; obje su projekcije paralelne. Ispitat ćemo, jesu li oba prušca u prostoru paralelna. Prije svega ćemo pravce graduirati. Projekciju prvoga prušca podijelit ćemo na $6-0=6$ jednakih dijelova. Mjesto krajnih točaka 3·5 i 9·8 drugoga prušca odredit ćemo preloženjem toga prušca nove krajne točke 4 i 9, pa ćemo dužinu projekcije za krajne

točke podijeliti na 9—4 = 5 jednakih dijelova. Dijelovi su na prvoj i na drugoj projekciji jednaki, a smjer je, u kojem rastu kote, u obadva slučaja isti; prušci su dakle u prostoru paralelni.

Zadaci za vježbu.

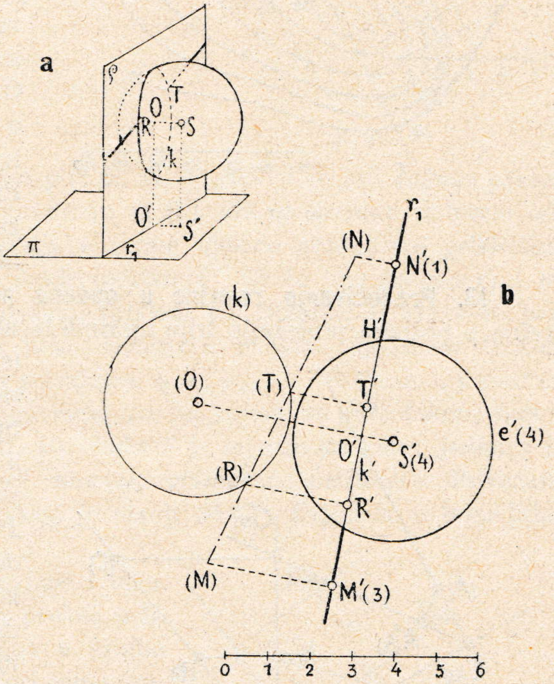
16.) Graduiraj pravac, koji je zadan točkama A' (3·2), B' (4·8); $A'B' = 7$. Ispitaj, je li priklon toga pravca veći ili manji od 45^0?

17.) Razriješi zadatak 13.) graduiranjem.

18.) Odredi kotu za D' u zadatku 15.) graduiranjem pravaca.

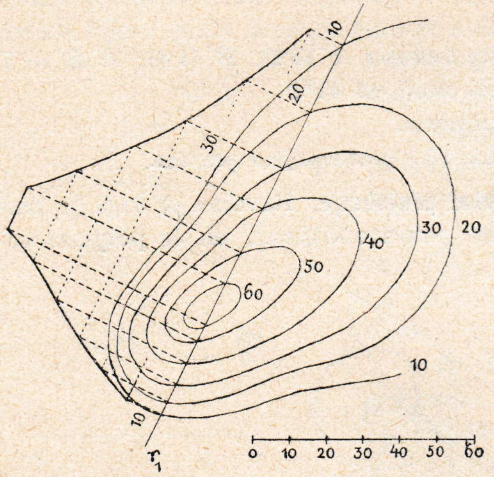
12. Ravnina, normalna na ravnini projekcijâ. Ravnina ρ, koja je normalna na ravnini projekcijâ (ravnina prometalica), bit će potpuno određena, ako se nacrta njezin trag r_1 na Π. Svaki lik, koji je u takvoj ravnini, imat će svoju projekciju u tragu r_1 (gl. § **7.**, *5*). Ako hoćemo da doznamo pravu veličinu takvoga lika, preložit ćemo ga zajedno s ravninom ρ oko traga r_1 u Π upravo onako, kako se pravac prelaže oko svoje projekcije u Π (§ **9.**).

Takvim je preloženjem riješena u slici 36.b zadaća: Odredi točke, u kojima pravac MN probada zadanu kuglu. Kugla, kojoj je središte točka S' (4), ima jedan najveći krug (ekvator) e, koji je horizontalan, t. j. || Π. U taj se krug, koji ima isti polumjer kao i kugla, projicira cijela kugla. Zadani će pravac M' (3) N' (1) probadati kuglu u dvije točke T i R, koje treba odrediti. Pravcem ćemo MN položiti normalnu ravninu ρ na Π. U trag r_1 te ravnine pada dakle projekcija $M'N'$ pravca i one kružnice k, u kojoj ravnina ρ siječe kuglu. Kružnica k ima središte O, koje ima istu kotu 4, kao i središte kugle, i projekciju O', koja je u sredini tetive, što je čini r_1 s projekcijom e' ekvatora; polovina je tetive, $O'H'$, polumjer za k. Preložimo li pravac u $(M)(N)$, a kružnicu k u (k), gdje je $O(O) = 4$, dobit



Sl. 36.

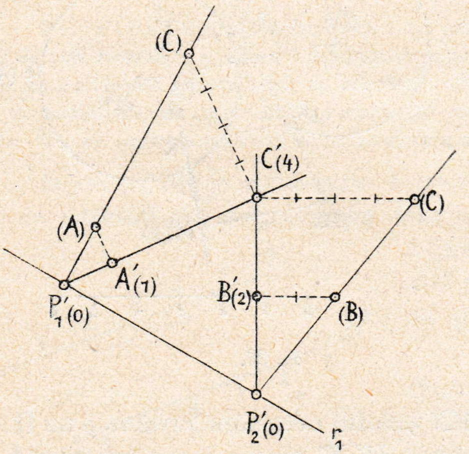
ćemo sjecišta *(T)* i *(R)* u preložaju. Njihove su projekcije na r_1, a kote su tih sjecišta dužine *T' (T)*, *R' (R)*. Kosa slika (sl. 36. a) prikazuje iste odnose u prostoru.



Sl. 37.

Presjeci s ravninama, koje su normalne na osnovnoj ravnini, upotrebljavaju se često, kad treba pobliže prikazati odnose kojega posebnoga dijela zemaljske površine. U slici 37. prikazana je projekcija uzvisine s pomoću krivuljâ jednakih visina (niveau-krivuljâ). Predodžba uzvisine bit će jasnija, ako se uzvisina prereže vertikalnom ravninom ρ, kojoj je trag r_1. Taj se prerez zove „profil". One točke niveau-krivuljâ, koje su u ravnini ρ, preložit će se oko traga r_1 u Π poznatim načinom. Preložaji će se sastaviti u krivulju, koja će biti to točnija, što se više niveau-krivulja upotrebilo.

13. Predočivanje ravnine u općenu položaju. Ako su od neke ravnine ρ poznate projekcije triju njezinih točaka s pripadnim kotama, na pr. (slika 38.) $A'(1)$, $B'(2)$, $C'(4)$, ravnina je ρ posve određena. Spojimo li točke A i C pa B i C, a onda za te pravce odredimo poznatim postupkom probodišta $P'_1(0)$ i $P'_2(0)$ s ravninom Π, dobit ćemo pravac $r_1 = P'_1 P'_2$, koji je posve u ravnini ρ, jer sadržava dvije njezine točke, a ujedno i posve u ravnini crtnje Π, jer su kote probodištâ P'_1 i P'_2 ništice. Pravac je r_1 presječnica ravnine ρ s ravninom Π ili trag ravnine ρ na osnovnoj ravnini. Ravnina se ρ najobičnije predočuje tragom r_1 i jednom svojom točkom, u sl. 38. na pr. točkom $C'(4)$.

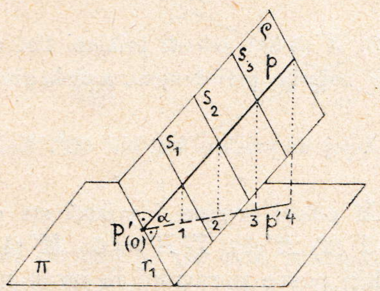


Sl. 38.

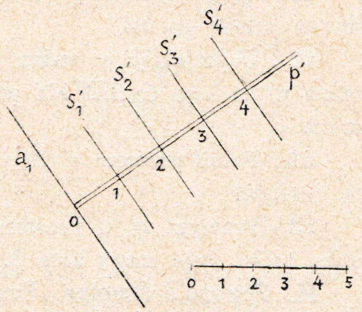
Svakom se točkom ravnine može položiti jedna sutražnica i jedna priklonica; sutražnica je paralelna s tragom ravnine, a priklonica je nor-

malna na tragu (§ **3.**, *15.* i § **6.**, *4*). Projekcija kojegod sutražnice bit će dakle paralelna s tragom, a projekcija je svake priklonice normalna na tragu ravnine.

U slici 39. prikazana je ravnina ρ svojim tragom r_1 i priklonicom p; bit će dakle $p' \perp r_1$ (§ **6.**, *4*). Budući da ravnina čini prema Π isti priklon,



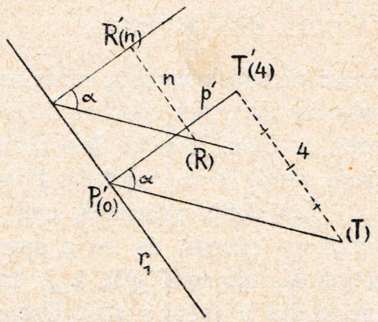
Sl. 39.



Sl. 40.

koji i kojagod njezina priklonica p (§ **6.**, *4*), a prikloni je kut nekoga pravca p određen, ako je pravac p graduiran (§ **11.**), bit će ravnina potpuno određena, ako se prikaže projekcija p' jedne njezine graduirane priklonice. Probodištem priklonice na Π, dakle točkom P', ići će trag ravnine $r_1 \perp p'$, a iz graduirane se priklonice doznaje prikloni kut ravnine. U slici 40. prikazana je tim načinom druga neka ravnina α. Svakom djelišnom točkom graduirane priklonice ide jedna sutražnica $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ravnine, t. j. pravac, koji je paralelan s tragom a_1 ravnine, pa na kojem su zato takove točke, koje imaju jednake kote. U sl. 40. dodano je mjerilo za kote; jedinica je toga mjerila manja od jednoga intervala graduirane priklonice. Prikazana ravnina α čini dakle s Π kut, koji je manji od 45^0. Uvjeri se o tome tako, da preložiš priklonicu!

Priklon se ravnine može naći i tako, da se jedna njezina priklonica preloži u Π. U slici 41. zadana je ravnina ρ svojim tragom r_1 i točkom T' (4). Povući ćemo projekcijom T' normalu na r_1, pa ćemo TP preložiti u Π; prikloni se kut α ravnine vidi u preložaju. Ako je obrnuto zadana projekcija R' neke točke R, koja je u ravnini ρ, pa treba odrediti njezinu kotu (sl. 41.), povući će se opet normala iz R' na r_1 i ta priklonica preložiti u Π s pomoću poznatoga priklonoga kuta α; točki R pripada dakle kota n.



Sl. 41.

*

Zadaci za vježbu.

19.) Odredi trag a_1 ravnine α, u kojoj su dva paralelna pravca $A'(2)$ $B'(5)$, $A'B' = 6$, i $C'(-3{\cdot}5)$ $D'(-0{\cdot}5)$, $C'D' = 6$. Širina paralelnih projekcija neka se izabere po volji; prušci $A'B'$ i $C'D'$ neka se namjeste gdjegod u paralelnim projekcijama.

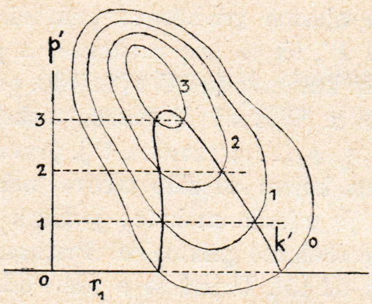
20.) Graduiraj jednu priklonicu ravnine $A'(-2)$, $B'(3)$, $C'(5)$; trokut $A'B'C'$ neka se izabere po volji.

21.) U projekciji je zadan pravac $M'(3)$ $N'(5{\cdot}5)$; odredi prikloni kut one ravnine μ, za koju će MN biti priklonica, i to najprije preloženjem, a onda graduiranjem.

22.) Položi pravcem $s'(3) \,||\, \Pi$ ravninu, kojoj će prikloni kut biti 60^0. Koliko ima rješenja?

23.) Pravcem m u prostoru i točkom M položi ravninu i prikaži sve one njezine točke, koje imaju kotu 3. Uzmi $m \equiv T'(2)$ $R'(5)$, $T'R' = 6$; $M'(4{\cdot}5)$.

14. Pravac i ravnina. Pravac može biti posve u ravnini ili izvan nje; u tome je drugom slučaju s ravninom paralelan ili je prema njoj koso položen tako, da je siječe u jednoj točki (na položaj, kad je pravac na ravnini normalan, ne ćemo se zasada obazreti).



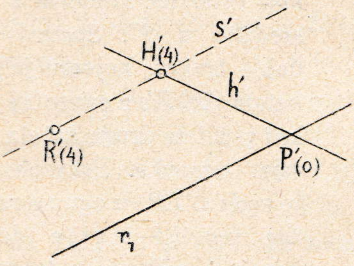
Sl. 42.

a) Kad je pravac posve u ravnini, može on biti sutražnica ili priklonica, ili je pak položen koso prema tragu ravnine. Kako je znatna priklonica, pokazano je u § **13.**

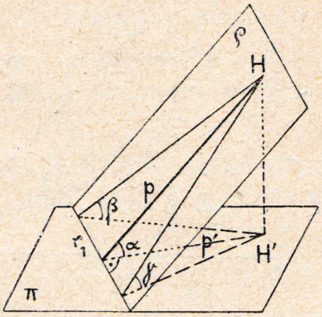
U slici 42. predočena je osobita jedna uporaba sutražnice. Tu je zadana projekcija neke uzvisine niveau-krivuljama 0, 1, 2, 3, pa ravnina ρ svojim tragom r_1 i graduiranom priklonicom p'. Svakom djelišnom točkom 0, 1, 2, 3, ... na p' može se položiti sutražnica; svaka će biti s jednom niveau-krivuljom uzvisine jednako visoka nad Π. Sutražnica će dakle pripadnu krivulju sjeći u dvije točke, koje su na uzvisini i ujedno u ravnini ρ. Učini li se to isto za više sutražnica, pa se dobivene sjecišne točke spoje, dobit će se projekcija k' one krivulje k, u kojoj ravnina ρ siječe uzvisinu.

Projekcija pravca h, koji je u zadanoj ravnini ρ položen koso prema tragu r_1, odredit će se s pomoću sutražnice. Ako projekcija pravca ima biti u h', bit će $P'(0)$, t. j. probodište toga pravca, u sjecištu traga r_1 i projekcije h' (slika 43.). Treba dakle odrediti kotu za još jednu točku na h. Ako je ravnina ρ zadana tragom r_1 i točkom $R'(4)$, položit će se točkom R sutražnica s, koja siječe h u H. Paralela kroz R' s r_1 siječe dakle h' u projekciji $H'(4)$. Time je pak pravac h određen.

Svaki pravac ravnine ρ, koji ide točkom H te ravnine, imat će manji prikloni kut prema Π, negoli je prikloni kut priklonice kroz H, t. j. pri-



Sl. 43.

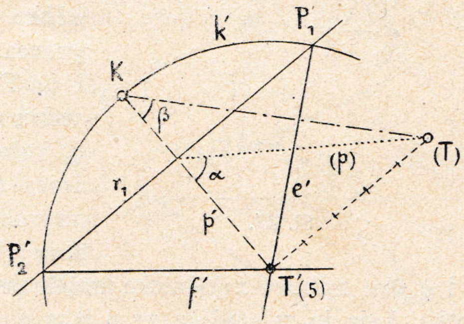


Sl. 44.

klon ravnine ρ. Od svih pravokutnih trokuta, koji imaju jednu zajedničku katetu HH' (slika 44.), a hipotenuze su im u ravnini ρ, imat će najmanju drugu katetu onaj trokut, kojemu je hipotenuza priklonica; sve su druge katete ostalih trokuta veće, pa je zato prikloni kut hipotenuzâ tih ostalih trokuta uvijek manji ($\alpha > \beta, \gamma, \ldots$).

Graduira li se dakle priklonica p ravnine i makar koji drugi njezin pravac h, bit će svagda intervali na h' veći od intervala na p' (isp. § **11.**).

Na tim se odnosima osniva rješenje ove zadaće: Točkom $T'(5)$ u ravnini ρ, koja je određena sa r_1 i $T'(5)$, povuci u ρ pravac, koji će imati prema Π priklon β (slika 45.). Ako je α priklon ravnine, mora biti $\beta < \alpha$. Svi pravci, koji idu točkom T pa imaju prema Π isti priklon β, čine uspravni stožac, kojemu je T vrh, a osnovka kružnica k', kojoj je središte u T' (§ **6.**, *2*; sl. 15.). Polumjer te kružnice bit će kateta pravokutnog trokuta, kojemu je jedna kateta TT' (visina stošca), a kut, koji je na onoj prvoj kateti, jednak β. Takov je trokut $(T)T'K$. Kružnica k', opisana iz T' s polumjerom $T'K$, siječe r_1 u dvije točke $P'_1 P'_2$. Dobivaju se

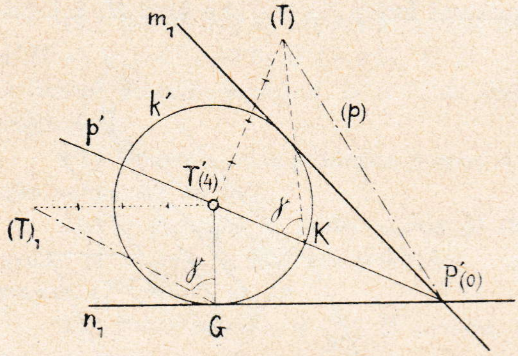


Sl. 45.

dakle uopće dva pravca $e \equiv P_1 T$ i $f \equiv P_2 T$. Kad bi kut β bio veći od α, ne bi se zadaća mogla riješiti; za $\beta = \alpha$ prelaze oba pravca e i f u priklonicu ravnine ρ za točku T.

U slici 46. riješena je obrnuta zadaća: Pravcem $T'(4) P'(0)$ položi ravninu μ, koja ima prema Π zadani priklon γ.

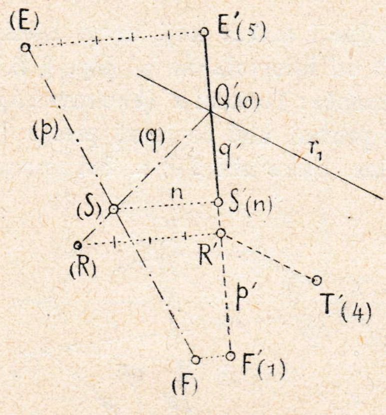
Opet će svi pravci, koji idu točkom T, a zatvaraju s Π kut γ, činiti uspravni kružni stožac, kojemu je T vrh, pa za koji osnovna kružnica k' ima središte u T'. Sastavi li se dakle trokut, kojemu je jedna kateta $(T)T'$, a suprotni joj je kut γ, bit će druga kateta polumjer osnovke. Pravcem, koji je zadan, TP, mogu se na stožac položiti dvije dodirne ravnine; njihovi su tragovi m_1 i n_1 tangente iz $P'(0)$ na osnovku stošca. Da svaka od tih ravnina, na pr. $[n_1, T'(4)]$, zatvara zaista kut γ s Π, vidi se odatle, što preložena priklonica točke T u ravnini ν čini sa svojom projekcijom kut γ, jer je $\triangle (T)\,T'\,K \cong \triangle (T)_1\,T'\,G$.



Sl. 46.

b) Ako treba nacrtati projekcije pravca t, koji je s nekom ravninom ρ paralelan, odredit će se najprije kojigod pravac q te ravnine, a onda nacrtati pravac, koji je s q paralelan (isp. § **4.**, *1*; § **10**.).

c) Zadana je ravnina ρ tragom r_1 i točkom $T'(4)$, dalje pravac $p' \equiv E'(5)\,F'(1)$, slika 47.; treba odrediti probodište toga pravca s ravninom ρ.



Sl. 47.

Pravcem p položit ćemo normalnu ravninu na Π; ona će ravninu ρ sjeći u pravcu q, kojemu projekcija q' pada u p'. Sutražnica točke T siječe pravac q u točki R; pravac je dakle q određen svojom projekcijom $q' \equiv Q'(0)\,R'(4)$. Preložimo li pravce p i q oko njihove zajedničke projekcije u (p) i (q), dobit ćemo preložaj (S) točke, koja je zajednička za p i za q, dakle za pravac p i ravninu ρ. Projekcija je točke S u S' na p', a kota n izlazi iz preložaja. Dio SF pravca p zakriven je ravninom ρ, a dio je SE nad ravninom.

Zadaci za vježbu.

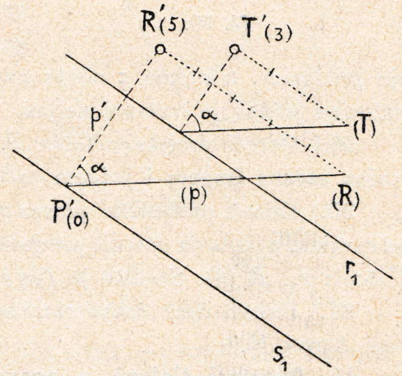
24.) Točkom $M'(4)$ povuci kojigod pravac p, koji će biti paralelan s ravninom $\rho \equiv [r_1, T'(2{\cdot}5)]$; točka je T' udaljena od traga r_1 za 3 dijela, a M' ima od r_1 udaljenost 2. Odredi probodište za p na Π.

25.) Zadana su dva mimosmjerna pravca $A'(3)\,B'(5)$; $A'B' = 4$, i $C'(1)\,D'(6)$; $C'D' = 3$. Položi točkom $M'(2)$ pravac, koji će oba zadana pravca sjeći. Točka M nije ni na AB ni na CD. Točkom M i pravcem AB položi ravninu pa odredi probodište S te ravnine s pravcem CD. Traženi će pravac biti MS.

26.) Udesi probodište pravca $M'(2)\,N'(4{\cdot}5)$ i paralelograma $AB \# CD$, i to $A'(3)$, $B'(5{\cdot}5)$, $C'(-1{\cdot}5)$, $D'(1)$. Naznači, koji je dio pravca zakriven paralelogramom.

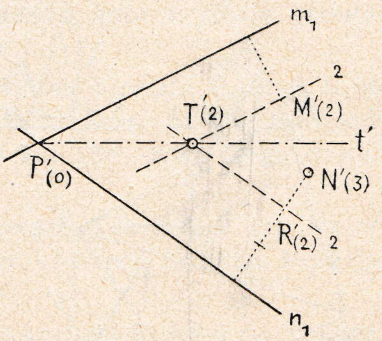
15. Dvije ravnine. Dvije ravnine mogu biti paralelne; tada su im tragovi paralelni, a prikloni kutovi prema Π jednaki (isp. § **4.**, *7*; § **6.**, *4*). Dvije se ravnine mogu i sjeći; njihov je presjek pravac (presječnica).

a) Točkom $R'(5)$ neka se položi ravnina σ paralelno s ravninom ρ, od koje je poznat trag r_1 i točka $T'(3)$ (slika 48.). Točkom T povući će se priklonica ravnine ρ i preložiti u Π tako, da se dobije prikloni kut α za ρ. Budući da će trag s_1 ravnine σ biti paralelan sa r_1, povući ćemo kroz R' smjer za projekciju priklonice normalno na r_1 te je preložiti s pomoću (R) i kuta α. Dobivenom točkom $P'(0)$ povući ćemo $s_1 \,||\, r_1$.



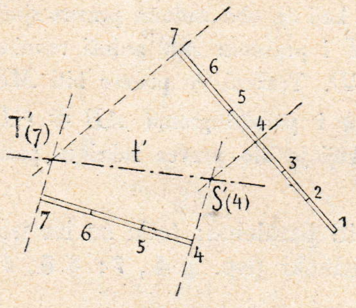
Sl. 48.

b) Presječnica dviju ravnina bit će određena, čim se nađu dvije točke, koje su zajedničke za jednu i drugu ravninu; spojnica je tih točaka tražena presječnica t. U slici 49. zadane su ravnine m_1, $M'(2)$ i n_1, $N'(3)$. Sjecište tragova m_1 i n_1 bit će probodište $P'(0)$ presječnice t. Da se odredi još jedna točka za t, položit će se u svakoj zadanoj ravnini sutražnica tako, da obje imaju istu visinu nad Π. Jedna je sutražnica položena točkom M, a druga onom točkom priklonice za N u ravnini ν, koja ima kotu 2; to je točka R. Obje sutražnice imaju zajedničku točku $T'(2)$, pa će biti $t' \equiv T'P'$.



Sl. 49.

Ako su obje ravnine zadane graduiranim priklonicama, slika 50., povući će se u istim visinama (na pr. 7 i 4) sutražnice za svaku ravninu, pa će se dobiti dvije sjecišne točke T i S, koje određuju presječnicu t. Tragovi oba-



Sl. 50.

dviju ravnina nijesu ni upotrebljeni. Ti bi tragovi prolazili probodištem P' (0) pravca t. Uvjeri se o tome!

Zadaci za vježbu.

27.) Zadana je ravnina graduiranom priklonicom p', dalje točka R' (3) izvan p'. Odredi graduiranu priklonicu za onu ravninu, koja ide točkom R te je s prvom ravninom paralelna.

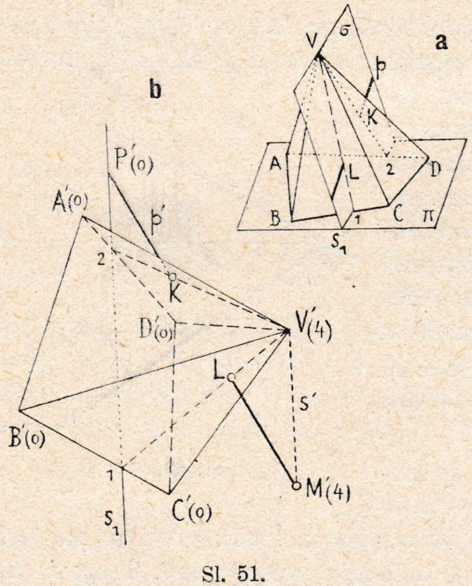
28.) Odredi daljinu dviju paralelnih ravnina r_1, M' (3) i s_1, N' (?), $r_1 \parallel s_1$. Položi gdjegod ravninu τ okomito na r_1 (i s_1) i preloži obje priklonice, u kojima τ siječe zadane ravnine, oko t_1 u Π_1. Razmak preloženih priklonica jednak je traženoj daljini.

29.) Odredi projekcije točke S, u kojoj se sijeku tri ravnine, ako je svaka ravnina zadana tragom i jednom točkom.

30.) Odredi probodište pravca p s ravninom tako, da pravcem položiš kakvugod ravninu, a onda da odrediš presječnicu q te ravnine sa zadanom. Uzmi $p \equiv M'$ (2), N' (5·5); r_1, R' (4). Sjecište je (pq) traženo probodište.

31.) Prikaži dvije takve ravnine, za koje će presječnica biti paralelna s Π u visini 4 nad Π.

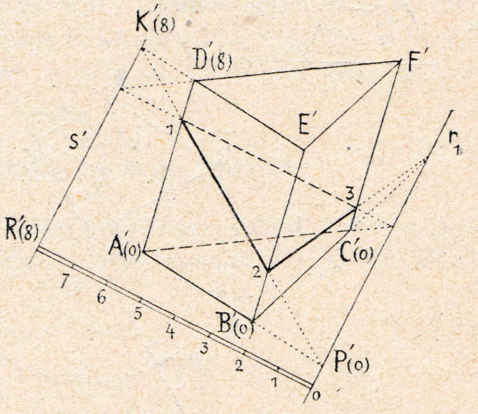
16. Presjeci tjelesâ s pravcima i ravninama. Neka bude osnovka nepravilne piramide četverokut u ravnini Π, i to A' (0), B' (0), C' (0), D' (0), (slika 51.). Vrh je piramide točka V' (4). Spoji li se V' s vrhovima na osnovci, nastaju projekcije pobočnih bridova, koji određuju četiri pobočna trokuta piramide. Zadan je osim toga pravac P' (0) M' (4). Traže se one točke, u kojima taj pravac probada piramidu. Iz priložene se kose slike 51.a razabira, da će se vrhom V i pravcem $p \equiv PM$ položiti ravnina σ, kojoj je trag na Π pravac s_1; taj će trag sjeći osnovku piramide u točkama 1 i 2. Pravci su $V1$ i $V2$ na piramidi i ujedno u ravnini σ. Kako je pak u toj ravnini i zadani pravac $p \equiv PM$, sjeći će on $V1$ i $V2$ u točkama L i K na piramidi. U kotiranoj je projekciji



Sl. 51.

(sl. 51.b) proveden isti taj postupak; budući da vrh V i točka M imaju istu kotu 4, ići će trag s_1 ravnine σ točkom P' (0) paralelno s $V'M'$. Pravac PM ulazi u piramidu na pobočci BCV u točki L, a izlazi iz nje na pobočci DAV u točki K.

Osnovka kose trostrane prizme, A'(0), B'(0), C'(0), uzeta je u Π (slika 52.); smjer je pobočnih bridova izabran po volji. Gornja je osnovka DEF u ravnini, koja je udaljena za 8 dijelova od Π. Zadana je još ravnina ρ tragom r_1 i točkom R' (8). Ta će ravnina sjeći svaku pobočku prizme u pravcu, a sva tri će ta pravca činiti presječni trokut prizme s ravninom ρ.



Sl. 52.

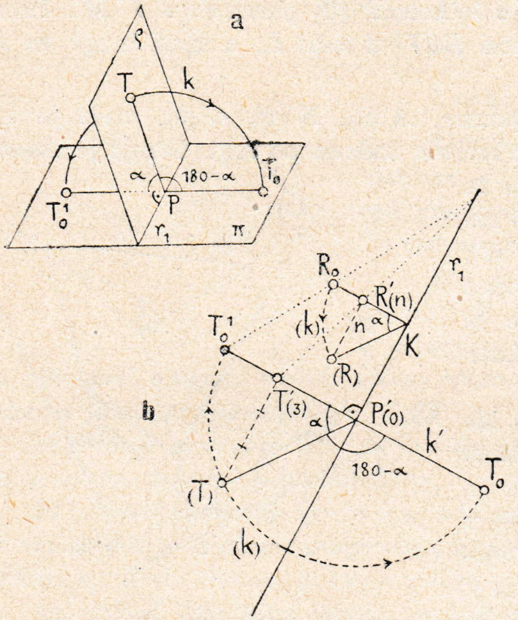
Sutražnica ravnine ρ, koja ide točkom R' (8), sjeći će sutražnicu $D'E'$ pobočne ravnine $ABED$ (a ta sutražnica ima opet visinu 8) u točki K' (8), koja pripada presječnici pomenute pobočke i ravnine ρ. Trag te pobočke, t. j. A'(0) B'(0), i trag r_1 ravnine ρ sijeku se u drugoj točki P' (0) iste one presječnice. Presjek je dakle pobočke $ABED$ i ravnine ρ pružac 12 na pravcu $K'P'$. Posve istim načinom odredit će se presječnica pobočke $ACFD$ s ravninom ρ. Presječnica 1 3 i trag A'(0) C'(0) sjeći će se opet na r_1, a isto to vrijedi i za B' C' i 2 3.

17. Preloženje ravnine. Kad je ravnina ρ normalna na Π, projicirat će se svaki lik te ravnine u trag r_1, a prava se veličina lika može dobiti, ako se ρ zaokrene oko r_1 u Π (gl. § **12.**) upravo onako, kako se pravac prelaže oko svoje projekcije.

Ako je pak ravnina ρ priklonjena pod kutom α prema Π, moći će se opet prava veličina svakoga lika te ravnine dobiti tako, da se ρ zaokrene oko r_1 u Π za kut α na jednu stranu ili za kut 180^0—α na drugu stranu (slika 53.a).

U slici 53. b zadana je ravnina ρ tragom r_1 i točkom T' (3). Da se točka T preloži oko r_1 u Π, povući ćemo priklonicu te točke, kojoj je probodište $P \equiv P'$ (0) na r_1.

Točka će se T okretati oko traga r_1 u kružnici k, kojoj je ravnina normalna na tragu r_1, pa kojoj je središte P, a polumjer prava dužina prušca TP. Odredit će se dakle najprije prava veličina $P'(T)$, a onda iz P' s tim polumjerom opisati kružnica (k), koja nije drugo nego na stranu prebačena kružnica k. Točka će T doći u Π, i to u $T_0{}^1$ ili u T_0, već prema

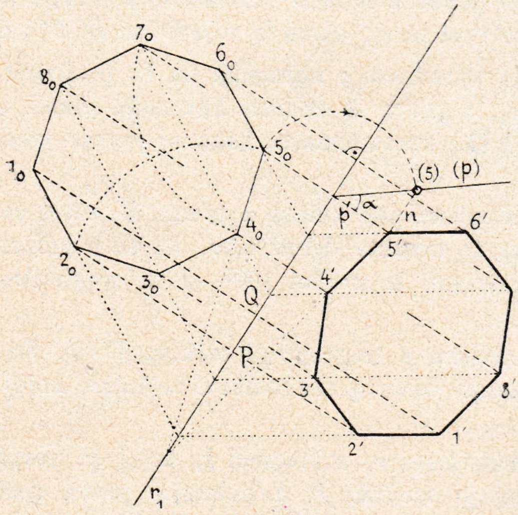


Sl. 53.

tome, zaokrenemo li ρ za kut α ili za $180^0-\alpha$.

Od neke točke R, koja je u ravnini ρ, može obrnuto biti zadan preložaj R_0; treba naći projekciju R' i kotu n te točke, kad dođe opet u ravninu ρ, od koje je poznat trag r_1 i priklon α. Iz R_0 spustit će se okomica na r_1, i iz nožišta njezina K na tragu opisati dužinom KR_0 luk *(k)*, koji će drugi krak priklonoga kuta α (gdje je vrh njegov u K) sjeći u *(R)*. Normala iz *(R)* na R_0K daje projekciju R' i ujedno kotu n te točke.

U slici 54. nacrtan je preložaj pravilnoga osmerokuta, označen s $1_0\,2_0\,3_0\,4_0\,5_0\,6_0\,7_0\,8_0$, pa je taj dignut u ravninu ρ, koja je zadana tragom r_1 i priklonom α. Najprije je određena projekcija $5'$ za točku 5. Pravac je $5_0\,5' \perp r_1$ i t. d. Homologne stranice preložaja i projekcije sijeku se produžene na tragu r_1, jer su te točke kod okretanja ostale stalne. Tako se $5_0\,6_0$ i $5'\,6'$ sijeku na r_1; isto to vrijedi i za homologne dijagonale, na pr. $4_0\,7_0$ i $4'\,7'$ i t. d. Kružnica, opisana osmerokutu u preložaju, prikazala bi se u projekciji kao elipsa, opisana projekciji osmerokuta.



Sl. 54.

Iz sl. 54. izlazi, da će za projekcije i za preložaje točaka u ravnini ρ vrijediti jednakost omjerâ: $P2_0 : P2' = Q1_0 : Q1' = \ldots$ Lik u preložaju i pro-

jekcija lika zovu se afini likovi. Zrake, koje spajaju preložaj i projekciju, na pr. 4_0 i $4'$ . . ., zovu se zrake afiniteta; one su normalne na tragu r_1, koji je os afiniteta.

Zadaci za vježbu.

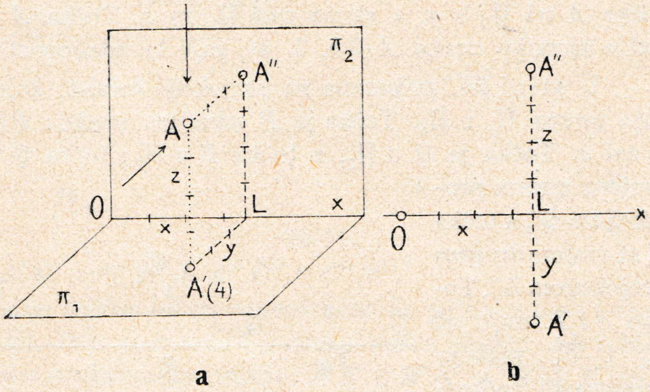
32.) Preloži presječnu krivulju u sl. 42. oko traga r_1 u Π.

33.) Odredi pravu veličinu presjeka u sl. 52. preloženjem oko traga r_1.

34.) U ravninu Π preložena je kružnica c_0; zaokreni tu kružnicu (nekoliko njezinih točaka) oko traga s_1 u zadanu ravninu σ, od koje je poznat priklon $\alpha = 60^0$, i prikaži projekciju c' kružnice. Tangente i tetive za homologne točke sjeći će se na s_1!

II. Normalno projiciranje na dvije ravnine.

18. Normalne projekcije točke. Neka bude opet zadana kotirana projekcija točke: A' (4) na osnovnoj horizontalnoj ravnini Π_1 (slika 55.a). Postavimo gdjegod normalnu ravninu Π_2 na Π_1. Mjesto da uz projekciju A' bilježimo kotu 4, t. j. visinu točke A nad Π_1, možemo tu visinu predočiti u ravnini Π_2, i to tako, da iz A spustimo normalu na Π_2. Nožište A'' normale imat će nad Π_1 toliku visinu (4), kolika je visina točke A nad Π_1. Točka je A posve točno određena s A' i s A''; obje se te točke zovu prva (A') i druga (A'') projekcija točke A. Ravnina Π_1 označuje se kao horizontalna ili prva ravnina projekcijâ; ravnina je Π_2 vertikalna ili druga ravnina projekcija. Presječnica ravninâ Π_1 i Π_2, t. j. pravac x, zove se os.



Sl. 55.

Oba pravca $AA' \perp \Pi_1$ i $AA'' \perp \Pi_2$ određuju pravokutnik $AA'LA''$, u kojem su suprotne stranice jednake. Kao što je dakle pruščem $A''L$ određena visina točke A nad Π_1, tako je pruščem LA' prikazana daljina točke A od ravnine Π_2.

Zamislimo, da je osnovna ravnina Π_1 ujedno ravnina crtnje; ravninu Π_2 možemo zaokrenuti oko x, dok ne dođe gore u Π_1. Točke A' i A'' bit

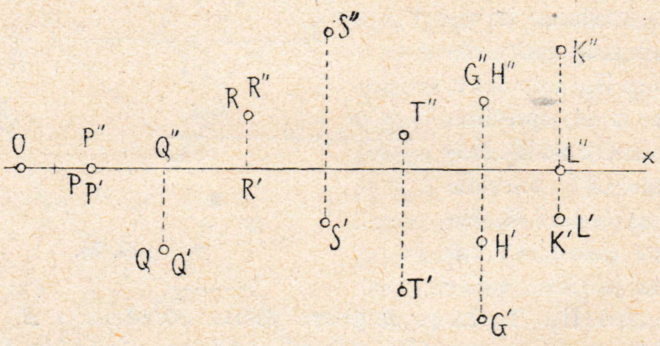
će poslije toga okreta na pravcu, koji je normalan na osi x, pa se zove ordinala točke A (gl. sl. 55. b). U tome se položaju zovu A' i A'' udružene normalne projekcije točke A (Monge-ove projekcije).

Istim načinom možemo uzeti, da je Π_2 ravnina crtnje, pa da se ravnina Π_1 zaokrenula oko osi x dolje u Π_2.

Jednom samo projekcijom, na pr. s A'', nije točka A u prostoru određena, jer u A'' imaju svoju drugu projekciju sve točke pravca AA''. Istom, kad se zadade još i projekcija A', određena je i daljina točke A od Π_2, pa je prema tome položaj točke A u prostoru posve točno poznat.

Kad se zadaje neka točka A projekcijama, označuju se njezine daljine od Π_2 i od Π_1 brojevima (u nekoj jedinici mjere, koja se može po volji izabrati). Da se odredi i to, je li ordinala točke A više desno ili više lijevo, uzima se na osi x početna točka O (ishodište) po volji, pa se daljine ordinalâ na desno i na lijevo od O označuju pozitivnim, dotično negativnim brojevima u istoj jedinici mjere. Udaljenost od O bilježi se uopće s x, daljina točke A od Π_2 s y, a visina nad Π_1 sa z. Točka A u sl. 55. zadat će se dakle ukratko ovako $A(3{\cdot}5, 3, 4)$, gdje te udaljenosti znače redom x, y i z.

U slici 56. prikazane su projekcije točaka, koje imaju različne položaje prema Π_1 i Π_2. Točka je P određena ovako: $P(2, 0, 0)$; ona je dakle u osi x. Točka je Q u Π_1, a točka R u Π_2; točka Q pada dakle zajedno sa svojom prvom projekcijom Q', a točka R sa svojom drugom projekcijom R''. Točke S i T imaju od Π_1 i Π_2 različne udaljenosti. Točke G i H jednako su visoke nad Π_1, ali od Π_2 imaju različne daljine. Točke K i L jednako su daleko od Π_2; daljina je točke L nad Π_1 jednaka ništici.



Sl. 56.

19. Projekcije prušca. Projiciramo li krajne točke prušca AB na ravninu Π_1, dobit ćemo točke A' i B'. Prużac $A'B'$ u Π_1 zove se prva projekcija prušca AB. Isto je tako $A''B''$ druga projekcija prušca AB (slika 57. a), dobivena normalama AA'' i BB'' na Π_2.

Uzmemo li na AB neku točku C pa je projiciramo na Π_1 i Π_2, bit će C' na prušcu $A'B'$, a C'' na $A''B''$. Sve su normale, kojima se projiciraju točke prušca AB na Π_1, u ravnini trapeza $AA'B'B$; među njima je

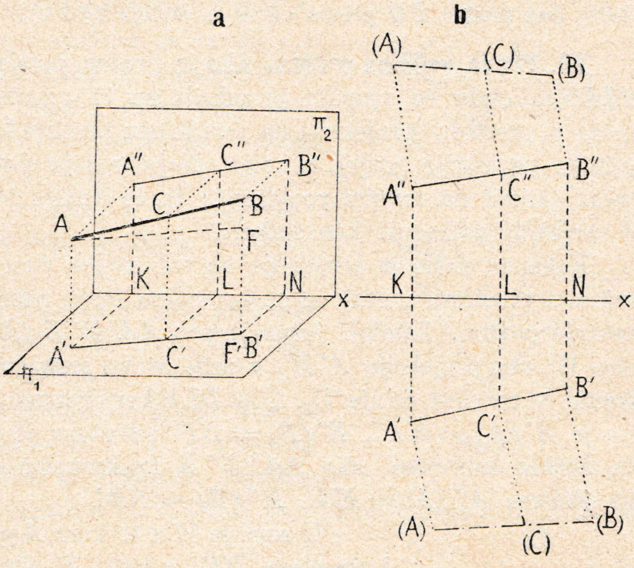
i normala točke C, pa je zato nožište C' te normale na tragu ravnine $AA'B'B$, dakle na $A'B'_1$ (§ **7.**, *5, 6*). Isto to vrijedi za 2. projekciju točke C.

Iz sl. 57. a izlazi, da se odnosi

$$AC : CB = A'C' : C'B'$$
$$AC : CB = A''C'' : C''B'';$$

točka C dijeli dakle pružac AB po istom omjeru, kao što p r o j e k c i j a točke C dijeli p r o j e k c i j u prušca AB.

Ujedini li se Π_1 s Π_2 u ravninu crtnje zaokretom oko osi x, prikazat će se pružac AB tako, kao u sl. 57. b; budući da su ordinale točaka A, B i C paralelni pravci, vidi se, da zaista postoji razmjer, koji izlazi i iz gornja dva razmjera, t. j.:

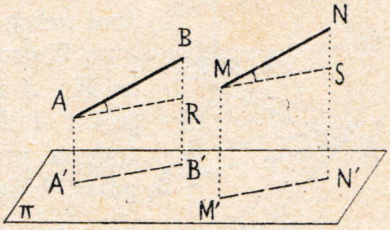


Sl. 57.

$$A'C' : C'B' = A''C'' : C''B''.$$

Dvije jednako velike dužine istoga pravca imat će jednake prve i opet jednake druge projekcije. Dva paralelna i jednako velika prušca AB i MN imaju jednake i paralelne istoimene projekcije: $A'B' \# M'N'$, $A''B'' \# M''N''$.

Iz § **10.** izlazi, da će oba paralelna i jednaka prušca AB i MN imati paralelne prve (i druge) projekcije. Povucimo točkom A pravac, paralelan s $A'B'$ (s l i k a 58.), dok ne siječe BB' u točki R; isto ćemo tako povući točkom M pravac, paralelan s $M'N'$ do S na NN'. Budući da je $\overline{MN} = \overline{AB}$, bit će $\triangle ABR \cong MNS$, jer su još kutovi tih trokuta izmjenice jednaki. Poradi toga je $\overline{AR} = \overline{MS}$, dakle i $A'B' = M'N'$. Isto se tako može dokazati, da je $A''B'' = M''N''$. Ako je $\overline{AB} \lesseqgtr \overline{MN}$, a prušci su paralelni, pokaži, da će biti $A'B' : AB = M'N' : MN$.



Sl. 58.

Z a d a c i z a v j e ž b u.

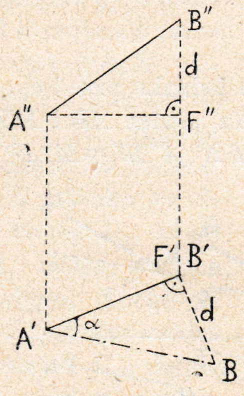
35.) Nacrtaj projekcije prušca AB, ako je a) $\overline{AB} = 5$, $AB \parallel \Pi_1$; b) $\overline{AB} = 3{\cdot}5$, $AB \parallel \Pi_2$ u udaljenosti 3 od Π_2; c) $AB \perp \Pi_1$, $\overline{AB} = 4$, a točka B ima nad Π_1 visinu 5; d) $AB \perp \Pi_2$, $\overline{AB} = 3$, točka B ima od Π_2 daljinu 0.

36.) Nacrtaj projekcije prušca MN, ako je a) $\overline{MN} = 4{\cdot}5$ u ravnini Π_1; b) $\overline{MN} = 3$ u ravnini Π_2, a točka je N udaljena za 5 od Π_1; c) $MN \parallel x$, $\overline{MN} = 2{\cdot}5$.

37.) Prikaži u projekcijama pružac PQ, ako je zadano a) P (5, 0, 0), Q (3, 2, 3·5); b) P (4, 3, 2), Q (4, 1, 5); c) P (4, 0, 0), Q (4, 3, 1). Kakov položaj ima pružac PQ prema osi x u slučaju b) i c)?

20. Prava veličina prušca. Ako je pružac paralelan s kojom ravninom projekcijâ, onda će njegova projekcija na tu ravninu biti jednaka dužini prušca u prostoru (projekcija na onu drugu ravninu bit će paralelna s osi x). Inače je projekcija uvijek manja. Najmanja je dužina projekcije, kad je pružac okomit na ravnini projekcijâ; ta će dužina biti 0, t. j. pravac se u toj projekciji prikazuje kao točka.

Kako se dakle iz projekcije ne vidi uvijek prava dužina, koju ima pružac u prostoru, morat će se ta dužina često odrediti, jer je njezino poznavanje znatno. Zamislit ćemo trapez $AA'B'B$ (sl. 57.) zaokrenut u ravninu Π_1 oko projekcije $A'B'$, a onda ovako zaokrenut trapez zajedno s Π_1 okrenut u ravninu crtnje Π_2. U sl. 57.b konstruiran je uz $A'B'$ taj trapez, gdje je $A'(A) = KA''$, $B'(B) = NB''$; tražena je prava dužina $(A)(B)$. Istu dužinu dobivamo, ako $AA''B''B$ zaokrenemo oko $A''B''$ u Π_2, t. j. ako učinimo $A''(A) = KA'$, $B''(B) = NB'$.



Sl. 59.

U slici je 57.a točkom A povučena paralela s Π_1, koja siječe BB' u točki F. Prava veličina AB izlazi dakle kao hipotenuza iz pravokutnoga trokuta AFB, u kojem je kateta AF jednaka projekciji $A'B'$ prušca AB, a druga kateta BF jednaka razlici d visinâ točaka B i A nad Π_1, t. j. $d = BB' - AA' = BF$. Tim je načinom u slici 59. konstruirana prava veličina nekog zadanoga prušca $A'B'$, $A''B''$.

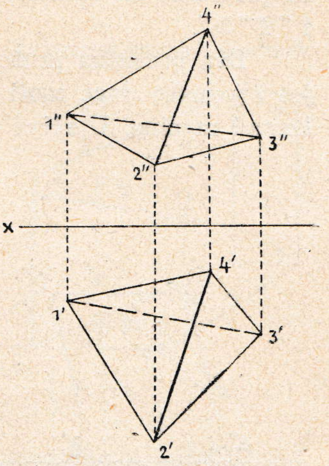
U drugoj je projekciji određena razlika d visinâ za B i A nad Π_1, pa je u Π_1 sastavljen pravokutan trokut $A'B'B$, gdje je $B'B = d$. Hipotenuza je $A'B$ tražena prava dužina. Postupak ostaje isti, ako se prava dužina odredi s pomoću $AA'' - BB''$.

Budući da se kod toga rješenja radi samo o razlikama udaljenosti za A i B od π_1 i π_2, a ne o samim daljinama od tih ravnina, vidi se, da nije ni potrebno znati, gdje je os x, t. j. je li pružac $\overline{AB}$ bliže ili dalje od ravnine π_1 ili π_2. Treba samo znati, da je smjer x okomit na ordinalama.

Kut, što ga čini projekcija prušca s preložajem, prikloni je kut prušca prema onoj ravnini, u koju je pružac preložen (isp. § **9.**).

Zadaci za vježbu.

38.) U slici 60. prikazane su projekcijama četiri točke, koje su u prostoru označene s 1, 2, 3 i 4. Sve su točke spojene među sobom u prušce. Odredi prave veličine svih tih pružaca i nacrtaj na strani u ravnini crtnje trokute 123, 124, 134 i 234 u pravoj veličini. Tako ćeš dobiti mrežu piramide 1 2 3 4.



Sl. 60.

39.) U Π_1 izabrana je kružnica sa središtem S (slika 61.), a u prostoru točka V. Spojimo li V s pojedinim točkama na kružnici, dobit ćemo izvodnice kružnoga kosoga stošca; projekcije izvodnica jesu $V'A'$, $V''A''$; $V'P'$, $V''P''$; $V'Q'$, $V''Q''$;... Koja je izvodnica stošca najduža, a koja najkraća? Odredi prave veličine tih dviju izvodnica. (Upotrebi 2. način u § **20.**).

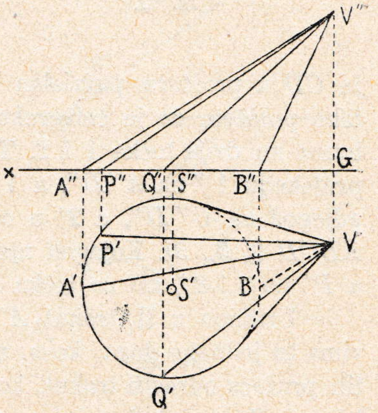
40.) Od prušca MN poznata je prva projekcija $M'N'$ i prava veličina njegova $MN = 6$. Uzmi M'' i odredi N''. Koliko ima rješenja?

41.) Nacrtaj projekcije uspravne prizme, kojoj je osnovka istostran trokut ($a = 3$) u Π_2, a visina joj je 5. Odredi pravu veličinu za dijagonalu pobočke.

42.) Točka C dijeli pružac A (1, 2, 5), B (3, 3, 2·5) u omjeru 3 : 2. Kolika je prava dužina dijela AC?

43.) Odredi pravu veličinu prušca M (1, 2, 4) N (1, 2·5, 5.).

44.) Nacrtaj projekcije piramide, kojoj je osnovka kvadrat, paralelan s Π_1 u udaljenosti 3, dvije su mu stranice paralelne s osi x, stranica $a = 2$, a središte je S (2, 5, 3). Visina je piramide $v = 4$. Spoji sredinu jednog pobočnog brida sa sredinom jednog osnovnog brida i odredi pravu veličinu tog prušca.



Sl. 61.

45.) Pravilan je šesterokut (stranica $a = 4$) u Π_2 osnovka uspravne prizmatičke ploče, kojoj je visina 1. Odredi pravu veličinu jedne najduže prostorne dijagonale.

46.) Na prušcu A (1, 2·5, 5) B (3, 4, 2) odredi točku C, koja će od Π_1 imati udaljenost 4·5.

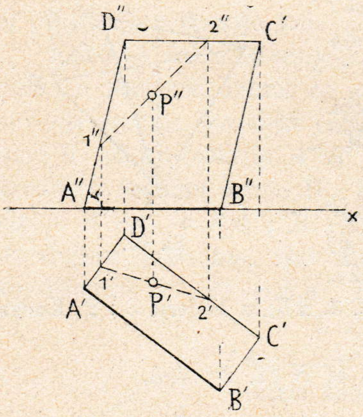
47.) Nađi na prušcu M (3, 5, 1) N (6, 2, 3) točku Q, koja ima jednake daljine od Π_1 i Π_2.

48.) U Π_2 zadan je nepravilan tetivni četverokut kao osnovka piramide. Odredi njezin vrh tako, da prave dužine pobočnih bridova budu jednake 6.

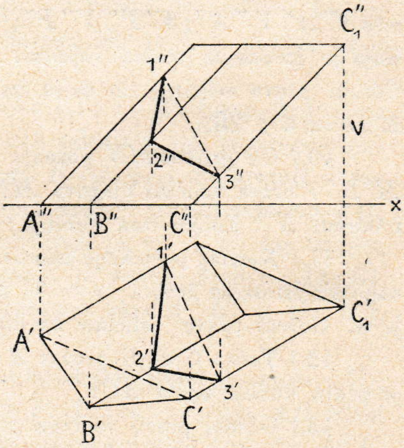
49.) Produži pružac A (1, 3, 2) B (3, 5·5, 5) za komad $d = 2·5$ na strani točke B.

21. Određivanje ravnine. Kako je ravnina određena s tri točke (§ **3.**, *2*), koje možemo sastaviti u trokut, može se ravnina na Π_1 i Π_2 predočiti tako, da nacrtamo obje projekcije nekoga trokuta ABC. U sl. 60. svaka je pobočka, na pr. 1 2 3, dio ravnine, pa je zato ta ravnina predočena trokutom $1'2'3'$, $1''2''3''$.

Dva paralelna prušca određuju opet ravninu (§ **3.**, *6*); ako su prušci još i jednako dugi, moći će se sastaviti u paralelogram, kojim se predočuje komad ravnine. U slici 62. izabran je pružac AB u ravnini Π_1, a pružac



Sl. 62.



Sl. 63.

je CD u prostoru paralelan s AB; ujedno je $AB = CD$. Pružac je CD tako položen, da je četverokut $ABCD$ pravokutnik. U ravnini $ABCD$ izabrane su dvije točke 1 i 2. Točka 1, koja je na prušcu AD, imat će drugu projekciju $1''$ na $A''D''$, a $1'$ će biti u ordinali na $A'D'$; isto je tako $2''$ gdjegod na $C''D''$, a $2'$ u ordinali na $C'D'$. Pružac je $\overline{12}$ posve u ravnini $ABCD$ (§ **3.**, *3*). Kojagod njegova točka P, za koju je opet P'' na $1''\ 2''$, a P' na $1'\ 2'$, bit će točka ravnine $ABCD$.

Uzmimo u Π_1 trokut $A'B'C'$ (slika 63.) i položimo njegovim vrhovima tri jednako duga, kosa, među sobom paralelna prušca; drugi će krajevi tih pružaca odrediti trokut, koji je prvom trokutu sukladan, pa koji je paralelan s Π_1 u nekoj visini v. Oba trokuta i nastala tri paralelograma čine oplošje prizme. Uzmimo na svakom od tri brida prizme, koji idu točkama A' B' i C', po jednu točku 1, 2 i 3; nastat će trokut 1 2 3, koji je posve sadržan na oplošju prizme. Ona neomeđena ravnina, koju određuju tri točke 1, 2 i 3, siječe prizmu u trokutu 1 2 3.

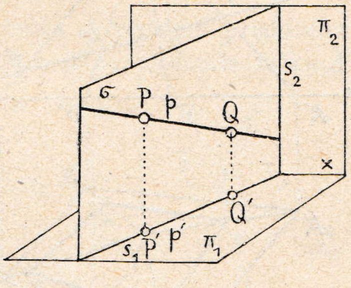
Zadaci za vježbu.

50.) Zadanom točkom A (3, 4, 2·5) položi ravninu, koja je omeđena nekim trokutom MNP.

51.) Nacrtaj mrežu prizme u sl. 63. i unesi u mrežu prave veličine stranicâ trokuta 1 2 3.

52.) Položi prušcem M (1, 3, 4) N (2, 4, 5·5) kakvugod paralelogramom omeđenu ravninu.

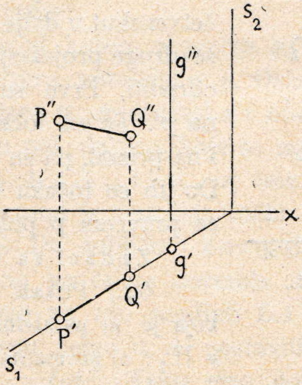
22. Ravnina okomita na Π_1 ili na Π_2. Pružac p i njegova projekcija p' na Π_1 (slika 64.) određuju ravninu σ, koja je okomita na Π_1; u njezinu je prvom tragu s_1 na Π_1 ujedno projekcija p'. Ravnina će σ sjeći Π_2 u pravcu s_2, koji se zove drugi trag i koji je normalan na osi x (§ 7., 7), jer je $\sigma \perp \Pi_1$ i $\Pi_2 \perp \Pi_1$. Budući da se takvom ravninom $\sigma \perp \Pi_1$ dobiva projekcija p' prušca, koji je u σ, kaže se, da ravnina σ projicira na Π_1; takvu ćemo ravninu nazivati „ravninom prometalicom" za Π_1.



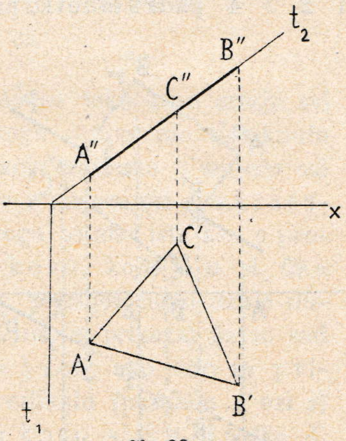
Sl. 64.

Ravnina τ može biti okomita na Π_2; njezin će prvi trag t_1 biti okomit na osi x, a drugi će trag t_2 biti naklonjen prema toj osi.

Ako je ravnina σ okomita na kojoj ravnini projekcijâ, projicirat će se svaki ravni lik ravnine σ na tu istu ravninu projekcijâ u trag ravnine σ. U slici 65. prikazan je pružac PQ i vertikalan pravac g u ravnini $\sigma \perp \Pi_1$, a u slici 66. trokut ABC, koji je u ravnini $\tau \perp \Pi_2$.



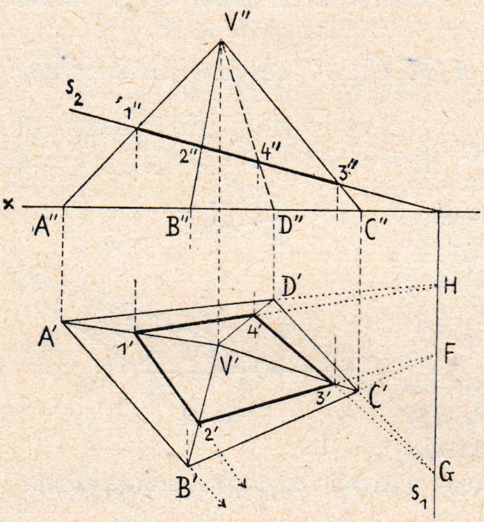
Sl. 65.



Sl. 66.

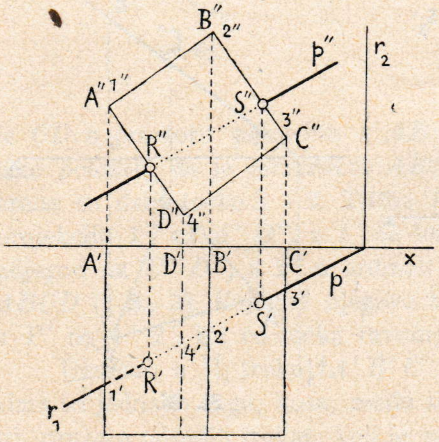
Ravnina $\sigma \perp \Pi_2$ sjeći će četverostranu neku nepravilnu piramidu $VABCD$ (slika 67.) u četverokutu 1 2 3 4, koji ima drugu svoju projekciju u tragu s_2 ravnine σ. Vrh 1 presječnog četverokuta ima drugu projekciju 1'' u sjecištu (s_2, $V''A''$), a prva će projekcija 1' toga vrha biti u ordinali na prvoj projekciji $V'A'$

brida VA i t. d. Kao kontrola točnoga konstruiranja moći će se upotrebiti neke osobite točke, koje se javljaju na tragu s_1, i to F, G i t. d. Ravnina pobočke BCV i ravnina presječnoga četverokuta 1 2 3 4 imaju naime zajednički pružac 2 3. Taj će pružac produžen sjeći Π_1 na tragu s_1 u točki F, koja je presječna točka triju ravnina BCV, σ i Π_1; tom istom točkom F mora prolaziti i produžen pružac $B'\,C'$, jer je on u ravnini BCV i u Π_1 (isp. § **3.**, *15*). Slično vrijedi za točku G i za još dvije točke, koje izlaze, ako se produže prušci 1 2 i 1 4 do traga s_1.



Sl. 67.

Neki će pravac p sjeći neko tijelo, na pr. prizmu, kojoj je osnovka kvadrat u Π_2 (slika 68.), u dvije točke R i S; u jednoj od tih točaka ulazi pravac p u tijelo, u drugoj izlazi iz njega. Položimo li pravcem p ravninu $\rho \perp \Pi_1$, bit će $p' \equiv r_1$. Ta će ravnina ρ sjeći prizmu u četverokutu 1 2 3 4, kojemu je prva projekcija pružac, a druga projekcija 1''2''3''4'' pada u osnovku prizme. Kako je sad pravac p zajedno s četverokutom 1 2 3 4 u istoj ravnini, sjeći će on četverokut u dvije točke R i S, kojima se druge projekcije R'' i S'' mogu lako odrediti. Prve su projekcije R' i S' na p'. Te su točke R i S zaista na p i na prizmi, pa su zato zatražene točke. Do tih se točaka može doći i tako, da se pravcem p položi ravnina $\tau \perp \Pi_2$.



Sl. 68.

Zadaci za vježbu.

53.) Prikaži tragovima ravninu ρ, koja je a) paralelna s Π_1; b) paralelna s Π_2; c) normalna na Π_1 i na Π_2 (t. j. na osi x).

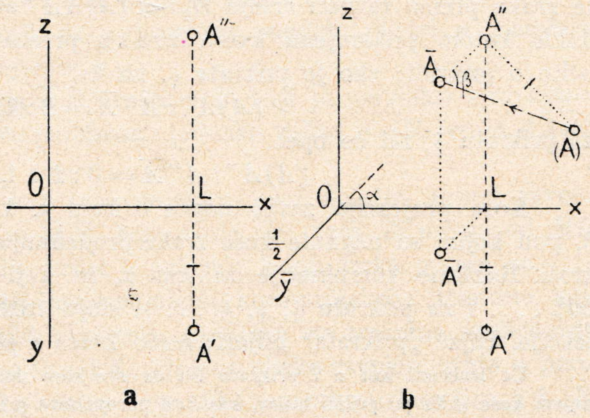
54.) Položi pruščima 1 2, 2 3, 3 4, 4 1 u sl. 67. četiri ravnine, koje su normalne na Π_1. Što omeđuju te ravnine?

55.) Uzdigni nad trokutom $A'B'C'$ u sl. 66. upravnu trostranu prizmu (koja će biti okomita na Π_1). Kakovo značenje ima onda trokut ABC u prostoru?

56.) Zamisli, da se u sl. 68. makne prizma tako, da ostane samo četverokut 1 2 3 4 u obje projekcije i pravac p', p''. Kakvo značenje imaju onda točke R i S?

III. Kosa projekcija.

23. Kosa projekcija točke i prušca. Neka točka A prostora predočena je svojim normalnim projekcijama A' i A'' (slika 69.a); ordinala točke A siječe os x u L; daljina OL znači udaljenost točke A od ravnine Π_3, koja u početnoj točki O stoji okomito na osi x. Ta ravnina Π_3 siječe drugu ravninu projekcijâ Π_2 u pravcu z, a Π_1 u pravcu y. Svaka je od tri osi x, y, z u prostoru na obje ostale normalna. Os je dakle y u prostoru normalna na x i na z, t. j. na ravnini crtnje Π_2.



Sl. 69.

Kod kose projekcije ostavljamo osi x i z netaknute, a os y crtamo kao $\bar{y}$ koso pod kojimgod kutom α prema x; isto se tako koso crtaju svi pravci, koji su u prostoru paralelni s y. Osim toga ostavljamo netaknute sve dužine, koje se mjere u smjeru osi x i one, koje mjerimo u smjeru osi z (visine nad Π_1); one pak daljine, koje se mjere u smjeru osi y, skraćujemo obično na $\frac{1}{2}$ ili $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ .... i t. d., no one mogu ostati i iste kao u prostoru. U sl. 69.b prikazana je ona ista točka A koso, koja je u sl. 69.a predočena ortogonalno. Da dobijemo kosu sliku, prenijet ćemo dakle dužinu OL nepromijenjeno na os x; normala $A'L$ na x prikazat će se sad paralelna s $\bar{y}$, pa ćemo na nju nanijeti $L\bar{A}' = \frac{1}{2} LA'$, ako smo za prikratu uzeli $\frac{1}{2}$; napokon ćemo u $\bar{A}'$ postaviti vertikalu (paralelu s osi z) i na nju prenijeti $\bar{A}'\bar{A} = LA''$. Tako smo dobili kosu sliku $\bar{A}$ točke A. U sl. 69. b udružena je ujedno kosa projekcija točke A s njezinim normalnim projekcijama.

Pravokutnik $AA'LA''$, koji se javlja kod normalnoga projiciranja (isp. sl. 55.) na Π_1 i Π_2, prikazuje se u kosoj slici kao paralelogram $\bar{A}\bar{A}'\,LA''$. Slika čini dojam, kao da na tri osi x, y, z i na pravokutnik $AA'LA''$ gledamo sa strane od desna odozgo i od naprijed prema ravnini crtnje.

*

Iz kose slike 69. b točke $\bar{A}$ možemo do položaja te točke u prostoru doći tako, da u A'' zamislimo postavljenu normalu na ravninu crtnje xz (ili Π_2), pa da na tu normalu od A'' prenesemo $2.\,\overline{AA''}$, i to zato, jer je $\overline{AA''}$ poradi izabrane prikrate $\frac{1}{2}$ samo polovina udaljenosti točke A od Π_2. Dobivena krajna točka na pomenutoj normali bit će točka A prostora, od koje je $\bar{A}$ kosa slika. Ta točka A, pa točke A'' i $\bar{A}$ čine u prostoru pravokutan trokut $AA''\bar{A}$ (pravi je kut kod A''). Preložimo li taj trokut oko katete $\bar{A}A''$ u ravninu crtnje, bit će njegova hipotenuza $(A)\bar{A}$ preložaj one zrake, kojom se točka A prostora koso projicira u $\bar{A}$. Prikloni je kut te zrake prema ravnini crtnje Π_2: $\sphericalangle (A)\bar{A}A'' = \beta$ (isp. § **6.**, *1*); pod tim je dakle kutom priklonjena kosa zraka prema Π_2. Veličina kuta β zavisi očito o prikrati; ako je prikrata $\frac{1}{2}$, bit će

$$(A)A'' : A''\bar{A} = 2 : 1;$$

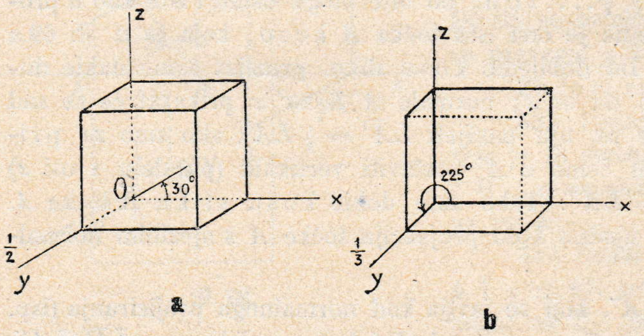
za prikratu $\frac{2}{3}$, bit će opet

$$(A)A'' : A''\bar{A} = 3 : 2 \text{ i t. d.}$$

Kosa projekcija zavisi uopće o kutu α, koji čini os $\bar{y}$ s x, i o kutu β, pod kojim su nagnute kose zrake projiciranja, ili drugim riječima, o prikrati. Različne kombinacije za kut α, za koji se obično uzima 30^0, 45^0, 60^0. . . ., i za prikratu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, . . . $\frac{1}{1}$, daju različne vrste takve kose projekcije. Riječ „prikrata“ bilježit ćemo kraće s *pr.*

Uz izabrani kut α i prikratu bit će sve kose zrake paralelne, a budući da je dojam kose slike po prilici takov, kao kod perspektive (gl. § **I.**, *3*), nazvali su tu kosu projekciju paralelnom perspektivom. Razlika je između te kose projekcije i prave perspektive to, što kod perspektive izlaze sve zrake projiciranja iz konačne jedne točke S (sl. 1. c), dok su kod „paralelne perspektive“ sve te zrake kose i paralelne među sobom. U našem slučaju, gdje su osi x i z pravokutno priklonjene, zove se ta kosa projekcija i kavalirska perspektiva.

U slici 70. a prikazana je u kosoj projekciji kocka, gdje je uzeto: $\sphericalangle \alpha = 30^0$, a prikrata je $\frac{1}{2}$. Kose zrake dolaze odozgo s desna i od naprijed. U slici 70. b uzeto je za $\sphericalangle \alpha = 225^0$, prikrata je $\frac{1}{3}$. Kose zrake dolaze s lijeva odozdo prema gore; tu se kocka vidi s donje strane.



Sl. 70.

Kosa projekcija prušca AB dobit će se tako, da se odrede kose projekcije $\bar{A}$ i $\bar{B}$ krajnih točaka istumačenim načinom. Četiri točke $A\bar{A}\bar{B}B$ čine u prostoru četverokut, koji je para-

lelan s kosim zrakama projiciranja, jer su u njegovoj ravnini zrake $A\overline{A}$ i $B\overline{B}$, koje su sa svim ostalim zrakama projiciranja paralelne (§ **4.**, *1*).

Zadatak za vježbu.

57.) Nacrtaj kose projekcije kocke, kojoj je brid $a = 5$, za različne kombinacije kuta α i prikrate (*pr.*). Uzmi: $\alpha = 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 135^0, 150^0, 225^0, 270^0$; $pr. = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. Odredi sliku i bez prikrate, t. j. $\frac{1}{1}$.

24. Pravila za koso projiciranje.

1) Kut α, što ga čini $\overline{y}$ s osi x, stalan je za cijelu kosu sliku; isto je tako stalna prikrata, koja se izabrala.

2) Svi prušci, koji su u prostoru paralelni s osi y, paralelni su u kosoj projekciji sa smjerom $\overline{y}$.

3) Kosa projekcija $\overline{AB}$ prušca AB, koji je paralelan s ravninom crtnje xz (ili Π_2), bit će paralelna i jednako velika s AB, jer je $A\overline{A}\overline{B}B$ paralelogram.

4) Pružac MN, koji je u prostoru koso položen prema ravnini xz, ima kosu projekciju $\overline{MN}$, koja može biti veća ili manja od MN. Veličina kose projekcije zavisi o položaju kosih zraka prema xz.

5) Paralelni prušci imaju paralelne kose projekcije. Ravnine, koje se mogu položiti takvim pruščima paralelno sa zrakama projiciranja, bit će i same paralelne (isp. § **4.**, *2*); one sijeku ravninu crtnje u paralelnim tragovima, na kojima su kose slike zadanih pružaca (isp. § **4.**, *7*). Budući da je kosa projekcija paralelna projekcija, baš tako kao i normalna projekcija, jer su i tu sve zrake paralelne među sobom, vrijedit će za kose projekcije pružaca ono, što je rečeno za normalne njihove projekcije u § **19.** Napose izlazi opet:

6) Ako točka C dijeli pružac AB po nekom određenom omjeru, dijelit će kosa slika $\overline{C}$ sliku $\overline{AB}$ po tome istom omjeru.

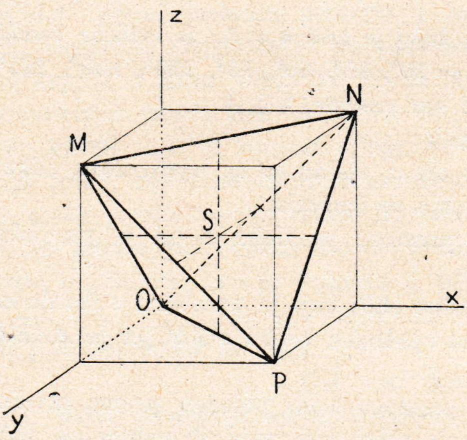
7) Sama kosa slika $\overline{A}$ ne određuje još položaj točke A u prostoru, jer je $\overline{A}$ kosa slika svih točaka, koje su na kosoj zraci, položenoj točkom A (gl. sl. 69. b). Za pobliže određenje točke A dodaje se još $\overline{A''}$ ili $\overline{A'}$. Izuzetak čine kose projekcije točaka, koje su u Π_1, Π_2 ili Π_3. Za takve je točke time ujedno određena udaljenost 0 od koje ravnine Π_1, Π_2 ili Π_3.

8) Ni kosa projekcija $\overline{AB}$ prušca ne određuje dovoljno položaj prušca AB u prostoru. I tu se dodaje $\overline{A''B''}$ ili $\overline{A'B'}$. Pružac, koji je u Π_1, Π_2 ili Π_3, određen je samom kosom projekcijom.

25. Predočivanje tjelesâ u kosoj projekciji. U slici 71. prikazana je koso kocka. U gornjoj je pobočci nacrtana dijagonala MN, a u donjoj dijagonala OP, tako da $MN \# OP$.*) Povučemo li još prušce MO i MP pa

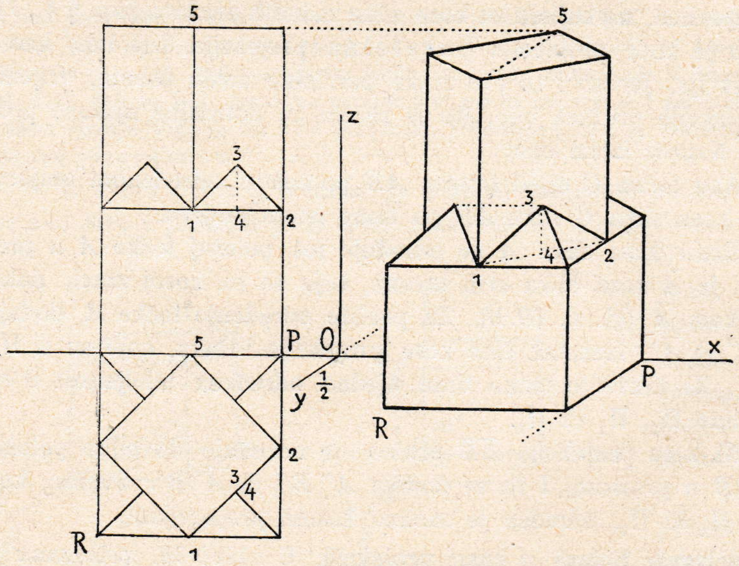
*) Horizontalan potez, kojim označujemo kosu projekciju neke točke, na pr. $\overline{M}$, odsada ćemo izostaviti, jer ne može biti pomutnje.

NO i *NP*, dobit ćemo tijelo, koje ima četiri vrha, četiri sukladne pobočke i šest bridova, koji su svi jednaki. Pobočke su istostrani trokuti. Tijelo se zove pravilan tetraedar. Svakom bridu toga tetraedra pripada suprotan brid, koji je s prvim mimosmjeran. Sredine suprotnih bridova spojene daju tri prušca, koji se sijeku u istoj točki (u središtu *S* kocke).



Sl. 71.

U slici 72. prikazano je u normalnim projekcijama tijelo, sastavljeno od uspravnih prizama i piramida i prislonjeno uz ravninu Π_2. Isto je to tijelo predočeno koso (prikrata $\frac{1}{2}$). Donji će se dio nacrtati istim načinom, kao što se crta kocka. Povuče li se u kosoj projekciji spojnica 1 2 dviju susjednih sredina na gornjem kvadratu, pa se dužina 1 2 raspolovi u točki 4, bit će 3 vertikalno nad 4 u visini, koja se mjeri u drugoj normalnoj projekciji.



Sl. 72.

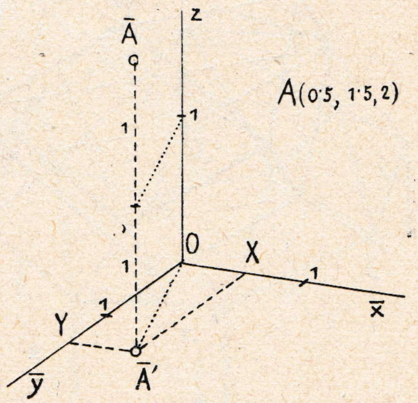
Točka je 5 u ravnini crtnje *xz*; njezina se visina nad *xy* može mjeriti u drugoj normalnoj projekciji. Predodžba je tijela mnogo jasnija u kosoj negoli u normalnoj projekciji. Zašto se tijelo u kosoj projekciji čini šire negoli u normalnoj?

26. Općena kosa projekcija. Dosada smo tri normalne osi *x*, *y*, *z* uzimali u kosoj projekciji tako, da su osi *x* i *z* bile izabrane u ravnini crtnje;

treća je os $\overline{y}$ bila nacrtana koso pod kakvimgod kutom prema x. Jedinice mjere na osima x i z bile su isto takove kao u prostoru, a jedinica je na $\overline{y}$ bila prikraćena.

U općenijem slučaju možemo uzeti, da je samo os z u ravnini crtnje, a da su obje osi x i y, koje čine pravi kut, u horizontalnoj ravnini izvan ravnine slike. Takve će se osi prikazati u kosoj slici koso položene prema osi z pod kakvimgod kutovima; obilježit ćemo ih s $\overline{x}$ i $\overline{y}$. Jedinice mjere mogu se za sve tri osi uzeti posve po volji, dakle različne među sobom.

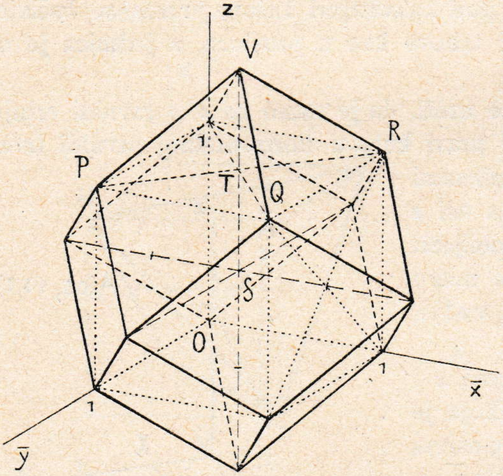
Tako su u slici 73. smjerovi $\overline{x}$ i $\overline{y}$ izabrani kakogod prema osi z, koja je pridržana u vertikalnom smjeru. Na osima $\overline{x}$, $\overline{y}$, z izabrane su po volji različne jedinice mjere; zajednička je njihova početna točka O, a krajne su točke označene s 1. Ima li se u toj kosoj projekciji predočiti kosa slika točke A (0·5, 1·5, 2), prenijet će se najprije od O na $\overline{x}$ dužina 0·5 u onoj jedinici mjere, koja vrijedi za tu os. U krajnoj točki X položit će se paralela s osi $\overline{y}$. Dalje će se na $\overline{y}$ od O prenijeti dužina 1·5 u onoj jedinici, koja vrijedi za tu os, pa će se u krajnoj točki Y povući paralela s $\overline{x}$. Obje paralele kroz X i Y sjeći će se u kosoj projekciji $\overline{A}'$. Položi li se kroz $\overline{A}'$ paralela s osi z, pa se na tu paralelu prenese dužina $\overline{A}'\overline{A} = 2$ u onoj jedinici, koja je izabrana za os z, dobit će se u krajnoj točki kosa slika $\overline{A}$ točke A. Treba li isto to učiniti za više zadanih točaka, moći će se za svaku os napose udesiti prikraćivanje s pomoću nekoga kuta proporcionalnosti. Taj se način prikazivanja zove „kosa aksonometrija“.



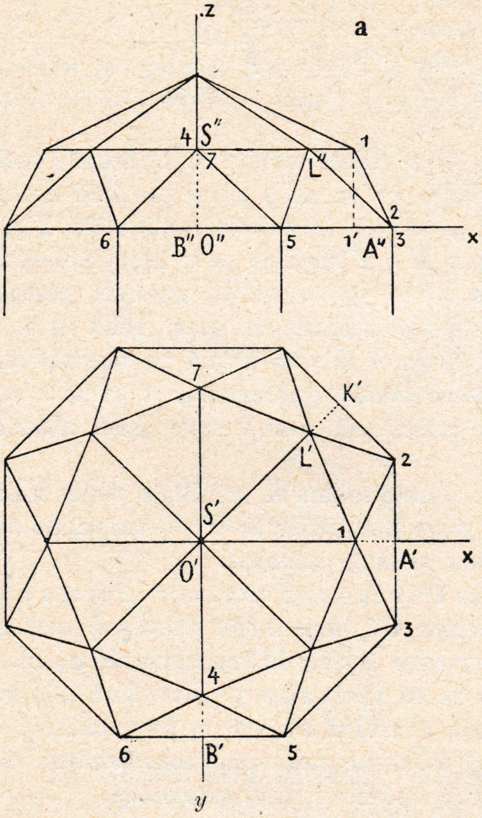
Sl. 73.

Točka A u prostoru, spojena s kosom slikom $\overline{A}$, određuje smjer kosih zraka projiciranja. Takva se zraka može konstruktivno točno naknadno odrediti, ako su smjerovi osi i pripadne prikrate izabrane.

Cijeli se taj postupak osniva na Pohlkeovu teoremu: „Povuku li se u ravnini nekom točkom O tri prušca $O\,1$, koji imaju kakvegod različne dužine, a koji među sobom čine kakvegod šiljaste ili tupe kutove, značit će ta slika uvijek kosu projekciju za tri jednako velike dužine, sve među sobom priklonjene pod pravim kutom u prostoru, i to za neki kosi smjer projiciranja, koji se može naknadno konstruktivno odrediti.“ Taj se teorem dokazuje posve općeno u višoj geometriji.



Slika 74.



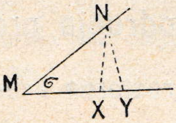
Slika 75. a.

27. Predočivanje tjelesa u općenoj kosoj projekciji. 1. U slici 74. prikazana je kocka za tri različne prikrate na $\bar{x}$, $\bar{y}$ i $\bar{z}$; gornji joj je kvadrat *1PQR*, a donja je osnovka u ravnini $\bar{x}\ \bar{y}$. Središte je gornje osnovke točka *T*. Tom je točkom povučena paralela sa $\bar{z}$, t. j. normala na gornju osnovku, pa je na taj pravac od *T* prenesena polovina brida kocke u mjerilu, koje vrijedi za os $\bar{z}$. Tako je dobivena točka *V* kao vrh piramide *V,1PQR*. Ponovi li se taj postupak istim načinom za sve pobočke kocke, dobit će se konačno otprije poznati kristalografski oblik: rombički dodekaedar u općenoj kosoj projekciji.

2. U slici 75.a prikazane su obje normalne projekcije gornjega dijela krovnoga tornjića, pa su izabrane tri osi simetrije kao osi *x*, *y*, *z*. Te su tri osi predočene u slici 75.b smjerovima $\bar{z}$, $\bar{x}$ i $\bar{y}$. Daljina $O'\,A'$ na osi *x* u sl. 75. a prikraćena je na osi $\bar{x}$ u dužinu $\overline{O}\,\overline{A}$, a daljina $O'\,B'$ na osi *y* (u prvoj normalnoj projekciji) prikraćena je na $\bar{y}$ u dužini $\overline{O}\,\overline{B}$. Visine u smjeru osi *z* pridržane su u kosoj projekciji iste kao u drugoj normalnoj projekciji nad *x*.

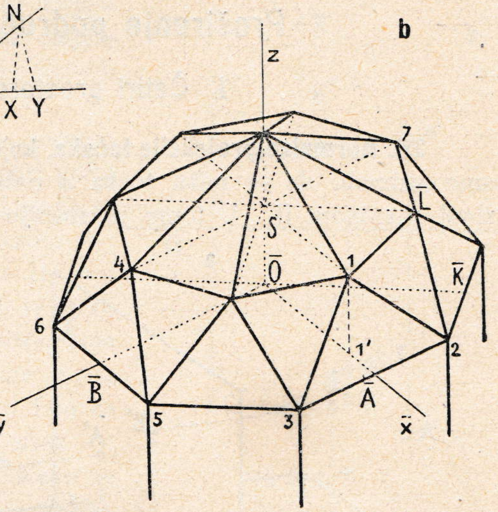
Slici 75.b pridodano je prikraćivanje dužinâ za smjerove na osima *x* i *y* s pomoću kuta proporcionalnosti σ. Neka dužina *MN* originala prikratit će se u smjeru osi $\bar{x}$ na dužinu *MX*, a u smjeru

osi $\bar{y}$ na dužinu MY. S pomoću smjerova NX i NY može se dakle prikratiti u obadva smisla svaka dužina, ako se prenese od M na gornji krak kuta σ, pa se krajnom točkom povuče paralela s NX dotično s NY; ta će paralela na donjem kraku od vrha M odrediti prikraćenu dužinu.



Za točku $1'$ prikraćena je najprije daljina $O'1$ na $\bar{O}1'$, dalje je u $1'$ uzdignuta vertikala, a onda je na taj pravac prenesena visina $1'1$, koja se mjeri u drugoj ortogonalnoj projekciji kao visina točke 1 nad x i t. d.

Bilješka. Slika 75.b prikazuje predmet tako, kao da se na nj gleda iz velike daljine koso odozgo dolje. Nijemci označuju takov način prikazivanja imenom „Vogelperspektive".



Sl. 75.b.

Zadaci za vježbu.

58.) Nacrtaj tijelo u sl. 75.a u kavalirskoj perspektivi pa isporedi tu sliku sa sl. 75.b.

59.) Predoči u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* na $\bar{y} : \frac{1}{3}$) pravilan oktaedar, kojemu je središte u početnoj točki O. Nacrtaj najprije kocku, kojoj je središte u O, i potraži sredine svih pobočaka te kocke; te su sredine vrhovi oktaedra.

60.) Prikaži u općenoj kosoj projekciji tetraedar u onom položaju, koji je izabran u sl. 71. Uzmi sve tri prikrate različne!

61.) Predoči u općenoj kosoj projekciji upravnu kvadratičku prizmu, kojoj je visina dvaput tolika, kolik je brid osnovke. Sve prikrate na osima neka su različne.

62.) Nacrtaj običnu kosu projekciju točke A u sl. 73., ako je $\alpha = 45^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$. Pridrži na $\bar{y}$ jedinicu OY iz sl. 73.

63.) Predoči u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$) rombički dodekaedar pa mu odsijeci sve uglove tako, da presječne ravnine idu polovinama bridova, koji izlaze iz tih uglova.

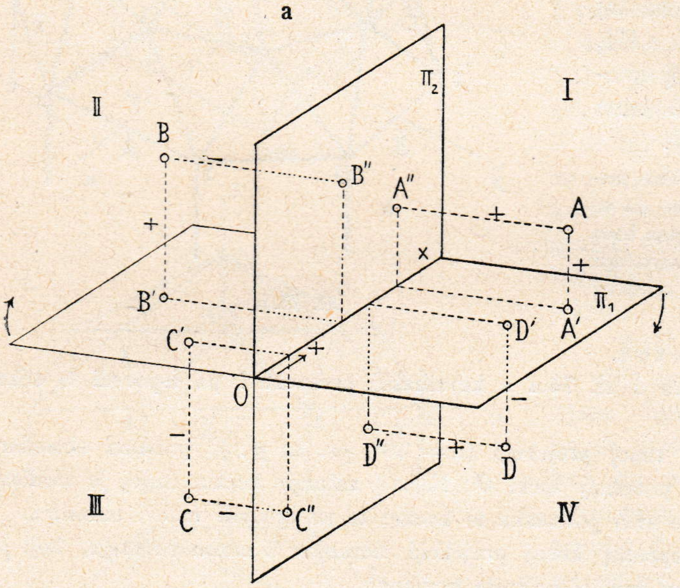
64.) Nacrtaj kosu sliku oktaedra za osi $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, koje su u općenu položaju. Isp. zad. 59.

Drugi odsjek.

Proširenje područja projiciranja.

I. Četiri prostorna kvadranta.

28. Normalne projekcije točaka, koje su u različnim kvadrantima. Dosada smo uzimali, da se neka točka A nalazi pred ravninom projekcijâ Π_2 i nad ravninom Π_1. U tome je slučaju prva projekcija A' te točke ispod osi x, a druga projekcija A'' nad tom osi za ujedinjeni položaj ravninâ Π_1 i Π_2.



Sl. 76. a.

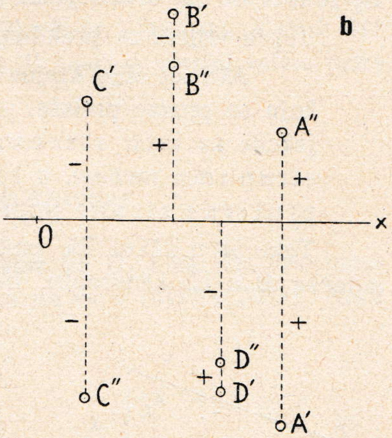
No neka se točka B može nalaziti i iza Π_2 i nad Π_1 (slika 76. a); da je uzmognemo projicirati na Π_1, produžit ćemo ravninu Π_1 iza Π_2, a onda spustiti iz B normale na Π_1 i Π_2. Tako će nastati obje projekcije B' i B'' točke B. Kad okrećemo ravninu Π_1 oko x dolje u ravninu crtnje Π_2 (isp. § **18.**), doći će B' poslije okreta gore nad os x. Sve točke, koje su nad Π_1, a iza Π_2, imaju obje svoje projekcije nad osi x (gl. točku $B'B''$ u slici 76. b).

Produžene ravnine Π_1 i Π_2 dijele prostor u četiri kvadranta, koji se bilježe rimskim brojevima I, II, III, IV.

Točka je A u I. kvadrantu: nad Π_1 i pred Π_2,
" " B " II. " : nad Π_1 i iza Π_2,
" " C " III. " : pod Π_1 i iza Π_2,
" " D " IV. " : pod Π_1 i pred Π_2.

Projekcije točke C, koja je u III. kvadrantu, bit će: C' nad osi x, C'' pod x (gl. sl. 76. b), a projekcije točke D, koja je u IV. kvadrantu,

jesu: D' i D'' pod osi x. Ako je na pr. točka B drugoga kvadranta jednako daleka od Π_1 i od Π_2, bit će obje njezine projekcije ujedinjene $B' \equiv B''$ nad osi x; inače će B' i B'' biti različne točke na istoj ordinali, i to B' nad B'' ili pod tom točkom, kako je već daljina točke B od Π_2 veća ili manja od daljine prema Π_1. Slično vrijedi i za točke ostalih kvadranata.



Sl 76.b.

U slici 76.a i 76.b uzeta je početna točka O na osi tako, da su sve četiri točke A, B, C, D na desno od O. Takve će se daljine desno od O obilježiti znakom $+$; nalazi li se pak neka točka M na lijevo od O, obilježit će se daljina ordinale te točke od O znakom —. Daljina neke točke, koja je pred Π_2, obilježit će se znakom $+$, a daljina točke iza Π_2 znakom —. Isto će tako visina točke nad Π_1 imati znak $+$, a visina točke pod Π_1 znak —. Kako se točka određuje s tri broja x, y i z (§ **18.**), bit će ti brojevi za točke u pojedinim kvadrantima ovako obilježeni:

	od O	od Π_2	od Π_1
u I. kvadrantu	$\pm$	$+$	$+$
„ II. „	$\pm$	—	$+$
„ III. „	$\pm$	—	—
„ IV. „	$\pm$	$+$	—

U projekcijama će se $-x$ prenijeti na lijevo od O, $-y$ nad x, a $-z$ pod x.

Znak $\pm$ znači, da točka može biti još desno ili lijevo od početne točke O. Tako je na pr. točka P (—3, —2, 1) u drugom kvadrantu (jer je P' i P'' nad x) i na lijevo od točke O, a točka je Q (2, —3, —5) u trećem kvadrantu (jer je Q' nad x, a Q'' pod x) i to desno od O.

29. Pružac, kojemu su krajne točke u različnim kvadrantima. Neki pružac može biti sav sadržan u jednom samo kvadrantu, ili mu jedan dio može biti u jednom, a drugi dio u nekom drugom kvadrantu, ili se napokon pružac može protezati u tri kvadranta.

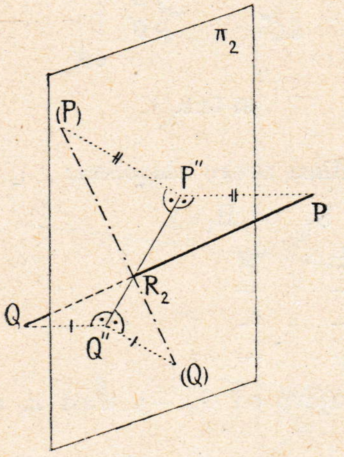
Kad se traži prava veličina prušca, treba paziti na to, u kojem su položaju njegove krajne točke prema Π_1 i Π_2. U slici 77. predočen je pružac PQ, koji ima prema Π_2 taj položaj, da je P pred Π_2, a Q iza te ravnine. Odredimo li drugu projekciju P'' Q'' toga prušca, pa hoćemo naći njegovu pravu veličinu (isp. § **20.**), okrenut ćemo četverokut PP'' Q'' Q oko

$P'' Q''$ u Π_2. No budući da su točke P i Q na različnim stranama ravnine Π_2, bit će u preložaju (P) i (Q) na različnim stranama od $P'' Q''$. Inače će biti opet kao i prije $P''(P) = PP''$, $Q''(Q) = QQ''$. Probodište R_2 prušca na Π_2 ostalo je za preloženja netaknuto.

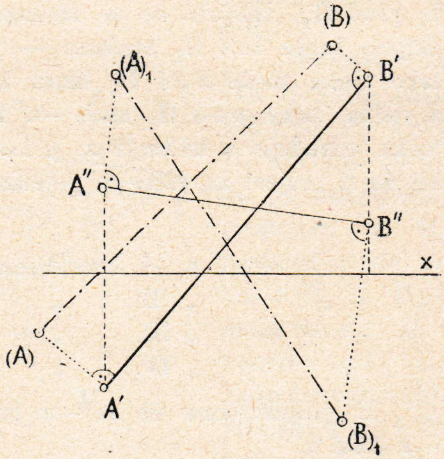
Uopće vrijedi za preloženje ovo pravilo:

Ako su obje krajne točke prušca na istoj strani ravnine, u koju se pružac prelaže, preložit će se krajne točke oko pripadne projekcije na istu stranu; ako su pak krajne točke na različnim stranama ravnine, u koju se prelaže, preložit će se krajne točke na protivne strane pripadne projekcije.

Tako je u slici 78. preložen pružac AB, kojemu je točka A u I., a točka B u II. kvadrantu, najprije oko $A' B'$ u Π_1, a onda oko $A'' B''$



Sl. 77.



Sl. 78.

u Π_2. Budući da su oba kraja A i B nad Π_1, preložene su te točke u Π_1 na istu stranu, t. j. u (A) i (B). Budući pak da su A i B na različnim stranama ravnine Π_2, preložit će se te točke oko $A'' B''$ u Π_2 na protivne strane, u $(A)_1$ i $(B)_1$. Svejedno je, okrene li se A prema gore ili prema dolje. Dakako da mora biti svagda $(A)(B) = (A)_1 (B)_1$.

Zadaci za vježbu.

65.) Nacrtaj projekcije ovih točaka: A (3, —2, 1), B (—2, 2, —1) C (—1, —2, —4), D (—3, 5, 2 5), E (—1, —3, 2), F (2, —1, —3), G (5, 1, —2), H (2, 1·5, 3). U kojem je kvadrantu svaka od tih točaka?

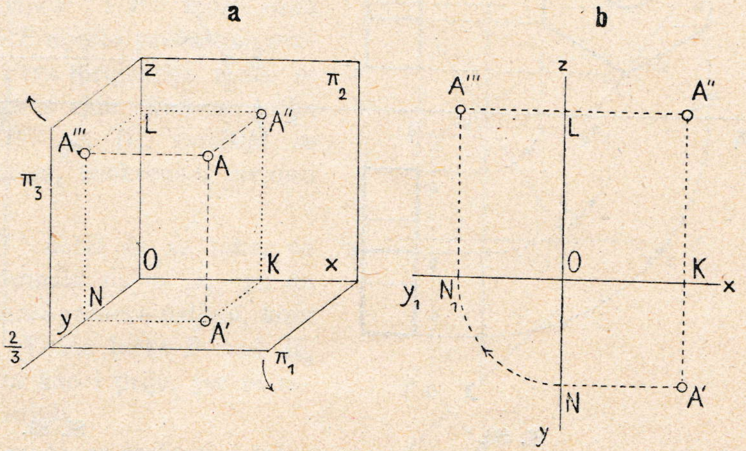
66.) Prikaži točke A, C i F (zad. 65.) u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{3}$).

67.) Predoči u normalnoj i kosoj projekciji ove prušce i odredi njihove prave veličine: A (2, —1·5, 0); B (1, —3, 5); M (3, 1, —2) N (4, —1, —2); P (—1, 2, 1·5) Q (3, 2, —3·5). Za točku B bit će normala BB'' iza xz paralelna s y i t. d.

68.) Kakov položaj imaju u prostoru točke: R (2, 3, —3), S (1, —2, 2), T (3, 5, —5), a onda opet točke U (1, —2, —2), V (2, —1, —1), Z (5, 3, 3)? Nacrtaj njihove kose projekcije ($\alpha = 45^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$). U kojoj se ravnini nalaze točke R, S i T?

II. Projiciranje na treću ravninu.

30. Treća ravnina projekcijâ Π_3, normalna na Π_1 i na Π_2. Početnom točkom O položit ćemo ravninu Π_3 normalno na os x (slika 79. a). Neka točka A prostora projicirat će se normalno na ravninu Π_3 tako, da se iz A spusti normala na Π_3; njezino je nožište A''' treća projekcija točke A na treću ravninu projekcijâ Π_3. Pravce, u kojima Π_3 siječe Π_2 i Π_1, obilježit ćemo opet sa z i y (isp. § **23.**).



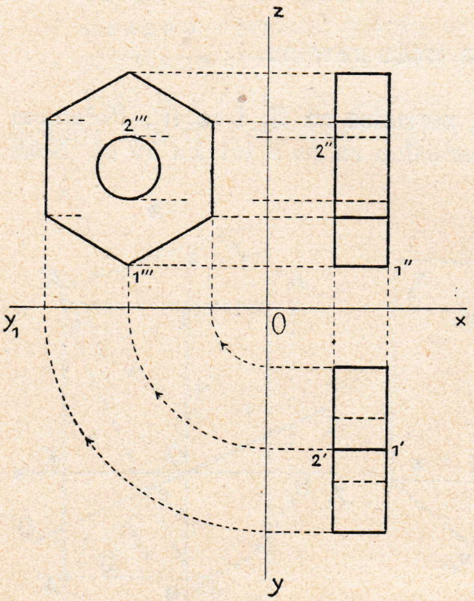
Sl. 79.

Projekcija A''' ima nad Π_1 istu visinu kao i točka A u prostoru, t. j. bit će $A'''N = AA' = A''K$; ta će projekcija biti i od Π_2 isto toliko udaljena kao točka A, t. j. bit će: $A'''L = A'K$. Daljina točke A od ravnine Π_3 prikazuje se u pruščima $AA''' = A''L = KO = A'N$.

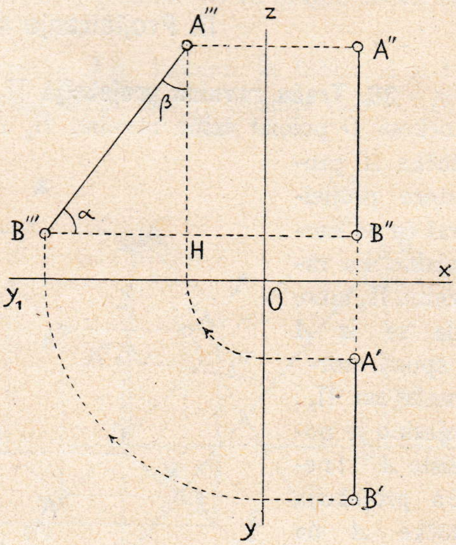
Kako se ravnina Π_1 zakreće oko osi x dolje u ravninu crtnje Π_2 (§ **18.**), tako se i ravnina Π_3 okreće oko osi z, obično na lijevu stranu, u ravninu Π_2. Kod toga će točka N doći zajedno s Π_1 dolje u os y, a onda zajedno s Π_3 na lijevo do N_1 u os y, koja pada u smjer osi x (slika 79. b). Isporedi odnose za daljine, koje su iste u slikama 79. a i b, s obzirom na prikratu $\frac{2}{3}$ u kosoj slici 79. a!

U slici 80. prikazana je u prvoj i drugoj projekciji uspravna pravilna šesterokutna prizmatička ploča, iz koje je koaksijalno izbušen uspravni valjak. Iz obje projekcije nije predočenje toga tijela dosta jednostavno i jasno; iz tih se projekcija šta više i ne može razabrati, da se radi o valjku, koji je iz prizme izbušen. Izvede li se treća projekcija, prikazuju se svi odnosi tijela mnogo bolje.

Treća se projekcija upotrebljava uopće onda, kad se radi o likovima, koji su u prostoru paralelni s Π_3. Treba li na pr. odrediti pravu veličinu



Sl. 80.



Sl. 81.

i priklone kutove prušca AB prema Π_1 i Π_2, ako je on paralelan s Π_3 (slika 81.), odredit će se njegova treća projekcija $A'''B'''$, koja je ujedno i njegova prava veličina. Isto se tako vide u trećoj projekciji i prikloni kutovi α i β prušca s Π_1 i Π_2. Bit će $A'''H = A''B''$ i $A'B' = B'''H$. Poradi $A'B' < A''B''$ bit će i $\beta < \alpha$.

Takvu treću projekciju zovu često i „pobočnom projekcijom" (bokocrtom).

Zadaci za vježbu.

69.) Nacrtaj sve tri projekcije prušca A (2, 3, 1) B (5, 1, 4) pa odredi njegovu pravu veličinu preloženjem oko $A'''B'''$ u Π_3.

70.) Nacrtaj sve tri normalne projekcije tetraedra, koji je koso predočen u sl. 71.

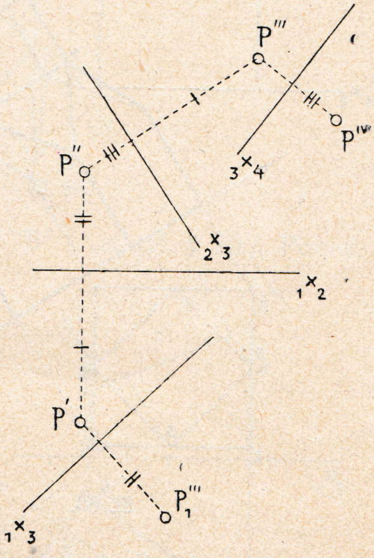
71.) Prikaži sve tri projekcije točaka, koje su u II. kvadrantu: M (—2, —1, 3); N (1, —3, 4); P (—1·5, —2, 2); Q (3, —1, 3). Treće će projekcije biti desno od z!

72.) Prikaži pružac M (3, 1, 4) N (6, 1, 4) u trećoj projekciji.

73.) Predoči sve tri projekcije uspravne prizme, kojoj je osnovka kvadrat u Π_3, a visina joj je $v = 5$.

74.) Predoči sve tri projekcije uspravnoga stošca, kojemu je osnovka kružnica ($r = 2$) u Π_2, a visina $v = 3$; središte je osnovke točka S (4, 0, 5).

31. Treća ravnina Π_3, normalna samo na Π_2 ili samo na Π_1. Točka P neka bude zadana projekcijama P', P'' (slika 82.). Zamislimo, da je položena nova ravnina Π_3 okomito na Π_2 na kojemgod mjestu tako, da je pravac ${}_2x_3$ trag ravnine Π_3 na Π_2. Ravnina Π_3 može se sad uzeti kao nova ravnina projekcija; na tu se ravninu može normalno projicirati točka P u P''', pa se obje projekcije P'' i P''' mogu uzeti za određenje točke P mjesto pređašnjih projekcija P' i P''. Prva projekcija može se dakle pustiti posve s vida. Kad se točka P projicirala u P''' na Π_3, zamišlja se opet, da se Π_3 oko ${}_2x_3$ zaokrene u ravninu crtnje Π_2.



Sl. 82.

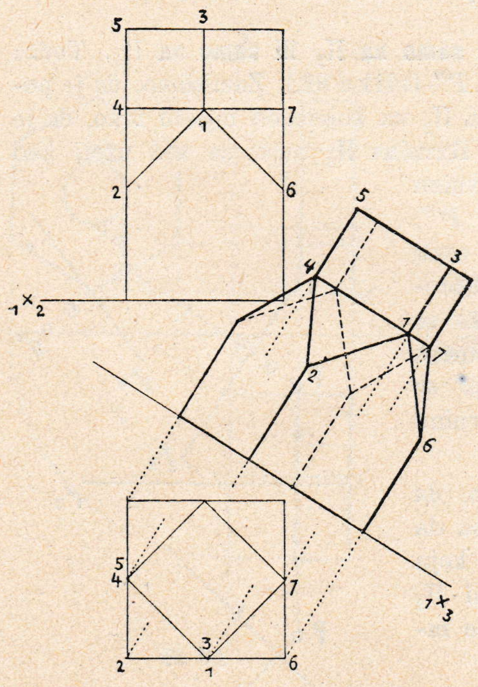
Projekcija P''' dobit će se tako, da se iz P'' spusti normala na os ${}_2x_3$, pa da se na normalu od osi prenese daljina, koju ima P' od osi x. Visina točke P nad Π_2 ostala je naime ista kao i prije, jer se ravnina Π_2 nije mijenjala.

Ravnina Π_3 može se izabrati i tako, da stoji normalno na Π_1; njezin ćemo trag na Π_1 obilježiti s ${}_1x_3$. Projiciramo li opet P u P_1''' na tu ravninu (sl. 82.), a onda zaokrenemo Π_3 oko ${}_1x_3$ u Π_1, pa napokon Π_3 zajedno s Π_1 u ravninu crtnje Π_2, pokazat će se, da će daljina točke P nad Π_1 ostati ista, jer se ravnina Π_1 nije mijenjala. Projekcija P_1''' imat će dakle od ${}_1x_3$ istu daljinu, kao što je ima projekcija P'' od osi x (ili točnije od ${}_1x_2$).

Budući da se kod toga postupka radi o zamjenjivanju ravninâ projekcijâ drugim takvim ravninama, zovu takve konstrukcije premještavanjem ili transformiranjem ravninâ projekcijâ.

Postavi li se na Π_3 normalno nova koja ravnina projekcijâ Π_4, dobit će se za točku P obje projekcije P''' i P^{IV} i t. d. Projekcija će P^{IV} imati od osi ${}_3x_4$ istu daljinu, kao što je ima projekcija P'' od osi ${}_2x_3$.

Takve se 3., 4. ... projekcije zovu i „projekcije sa strane" (stranocrti). Ako je neko tijelo postavljeno u neki poseban položaj prema Π_1 i Π_2, moći će se njegov oblik i odnosi njegovi bolje razabrati, ako se uzme projekcija toga tijela sa strane (s pomoću Π_3, Π_4, ...). Obrnuto se pojedine tvorevine, koje su prema Π_1 i Π_2 u općenu položaju, mogu umetanjem novih ravnina projekcija dovesti u posebne položaje prema tim ravninama, pa se tim i nove projekcije prikazuju jednostavnije.



Sl. 83.

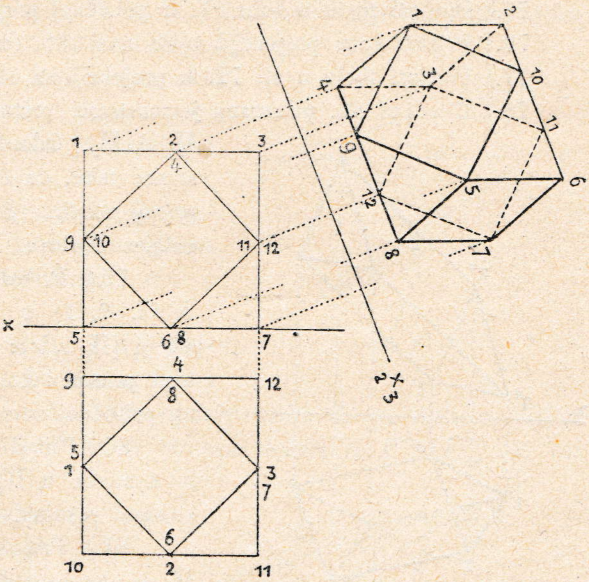
32. Predočivanje tjelesâ s pomoću 3. projekcije (stranocrta). U slici 83. prikazan je u prvoj i drugoj projekciji donji dio nekoga kamenoga stupa. Pojedine su točke na tijelu označene u Π_1 i Π_2 istim brojkama. Da tijelo predočimo sa strane, položit ćemo novu os ${}_1x_3$ koso prema tlocrtu tijela pa ćemo pojedine točke predočiti u 3. projekciji. I u 3. su projekciji pojedine točke označene istim brojkama kao u tlocrtu i nacrtu.

Točka 1 u 3. projekciji dobila se tako, da se kroz 1. projekciju točke 1 postavila normala (ordinala) na novu os ${}_1x_3$, pa se na tu ordinalu prenijela od ${}_1x_3$ daljina 2. projekcije te točke 1 od ${}_1x_2$. Isto je to ponovljeno za sve ostale točke predmeta. Takve projekcije sa strane dosta se približuju kosim slikama, samo što se u njima sve točke, koje su jednako visoke nad ravninom osnovke, prikazuju u horizontalnom pravcu; tako su na pr. u sl. 83. točke 1, 4, 7 u istome horizontalnom prušcu, dok su one u prostoru vrhovi kvadrata. U kosoj se projekciji pak takov kvadrat prikazuje kao paralelogram (isp. sl. 72.).

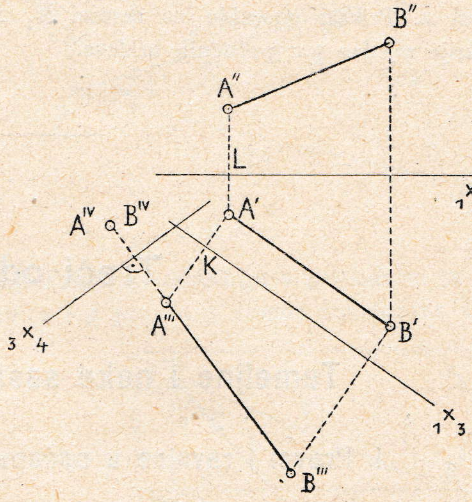
U slici 84. položena je treća ravnina $\Pi_3 \perp \Pi_2$, pa je u trećoj projekciji sa strane prikazano tijelo, koje postaje, ako se od kocke odrube svi uglovi ravninama, koje idu kroz tri susjedne sredine na bridovima. Postupak

je ovdje posve isti kao u predašnjem primjeru, samo što se sad na ordinale u trećoj projekciji prenose daljine p r v i h projekcija od osi x.

43. Određenje prave veličine prušca s pomoću treće projekcije. Pružac AB (s l i k a 85.), koji ima prema Π_1 i Π_2 općen položaj, može se dovesti u taj osobit položaj, da bude s trećom ravninom Π_3 paralelan. Treba samo novu os $_1x_3$ položiti paralelno s prvom projekcijom $A'B'$ prušca. Odredi li se naime istumačenim načinom projekcijâ $A'''B'''$, pa se promatraju projekcije prušca AB na Π_1 i Π_3 kao dvije pridružene projekcije, bit će $AB \parallel \Pi_3$, jer je $A'B' \parallel {_1x_3}$ (gl. § **20.**). Poradi toga osobitoga položaja vidi se u $A'''B'''$ ujedno p r a v a v e l i č i n a prušca AB. Isporedi li se ta treća projekcija s preloženjem dužine u sl. 57. b, opazit će se, da je u obadva slučaja učinjena gotovo ista konstrukcija: $A'''K = A''L$ i t. d. Ravnina Π_3 može se položiti i normalno na Π_2 i to tako, da bude $_2x_3 \parallel A''B''$.



Sl. 84.



Sl. 85.

Hoćemo li, da pružac AB bude na jednoj ravnini projekcijâ (Π_4) n o r m a l a n (sl. 85.), položit ćemo novu os $_3x_4$ normalno na $A'''B'''$. Obje će se krajne točke A i B projicirati u istu točku A^{IV}, B^{IV}, koja od osi $_3x_4$ ima jednaku daljinu, kao što je imaju točke A' i B' od $_1x_3$. Da se općeno položen pružac prikaže u projekciji kao točka, potrebne su dakle d v i j e transformacije.

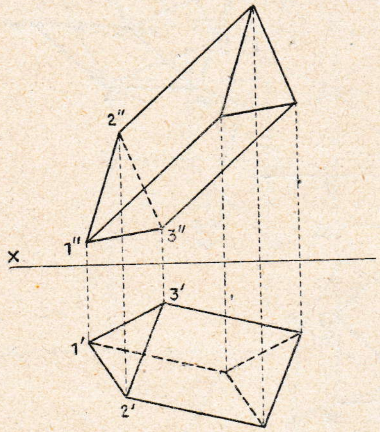
Zadaci za vježbu.

75.) Predoči tijelo u slici 84. u pobočnoj projekciji $\Pi_3 \perp x$ (§ **30**).

76.) Prikaži kosu projekciju tijela u sl. 83. ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$).

77.) Predoči tijelo u sl. 72. u projekciji sa strane ($\Pi_3 \perp \Pi_1$).

78.) U slici 86. prikazana je trostrana prizma u općenu položaju prema Π_1 i Π_2. Odredi 3. projekciju te prizme sa strane tako, da će se pobočni bridovi vidjeti u pravoj veličini (§ **33**.). Promotri vidljive i nevidljive dijelove.



Sl. 86.

79.) Prikaži pružac $MN : M$ (3, 1, 4) N (3, 2, 1) u 1., 2., i u pobočnoj projekciji ($\Pi_3 \perp x$); odredi dalje četvrtu projekciju toga prušca tako, da Π_4 bude ravnina okomita na pobočnoj ravnini Π_3.

80.) Prikaži uspravni kružni valjak, kojemu je osnovka u Π_1, u 3. projekciji, ako je Π_3 kojagod ravnina, koja ide osi valjka.

81.) Prikaži pravilni tetraedar na Π_1 i Π_2 u onome položaju, koji ima u sl. 71., pa izvedi 3. projekciju na $\Pi_3 \perp \Pi_2$ (gl. zadatak 70.).

82.) Zadana je 1. i 2. projekcija uspravne piramide, kojoj je osnovka kvadrat u Π_1; jedna dijagonala osnovke paralelna je s osi x. Prikaži piramidu na ravnini $\Pi_3 \perp \Pi_1$ tako, da se u 3. projekciji ne prikrije nijedan par pobočnih bridova.

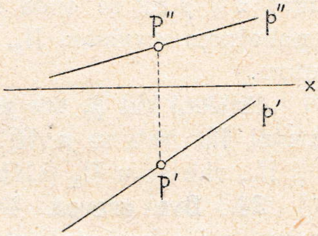
Treći odsjek.

Temeljne i neke sastavljene zadaće.

I. Pravci i ravnine u općenu i paralelnu položaju.

34. Projekcije neomeđena pravca. Nacrtamo li dvije neomeđene projekcije p' i p'' (slika 87.), određuju one neomeđen pravac p u prostoru. Svaka točka P pravca p imat će svoju prvu projekciju P' na p', a drugu projekciju P'' na p''. Sve točke pravca p čine niz točaka na p; taj se

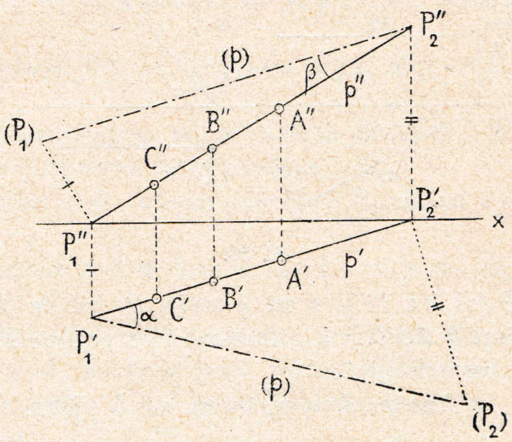
niz može protezati najviše u tri prostorna kvadranta. U slici 87. mogu se na p', p'' naći točke, koje su u I., II. ili IV. kvadrantu; nijedna dakle točka na p nije u III. kvadrantu. Pravac će biti sasvim sadržan samo u jednom kvadrantu, ako je paralelan s osi x (dakle s Π_1 i Π_2), a prolazit će kroz dva kvadranta, ako je paralelan samo s Π_1 ili samo s Π_2.



Sl. 87.

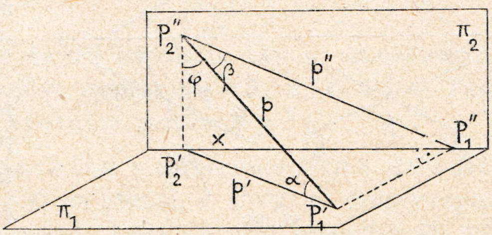
Kad je pravac paralelan s jednom ravninom projekcijâ, bit će mu projekcija na onu drugu ravninu projekcijâ paralelna s osi x (gl. isto za pružac u § **20.**).

35. Probodišta pravca s Π_1 i Π_2. Prikloni kut. Promatramo li redom različne točke A, B, C, ... na pravcu p (slika 88.), opazit ćemo, da se njihova visina nad Π_1 sve više umanjuje; kad točka pravca dolazi u P'_1 (P''_1 na osi x), bit će njezina visina nad Π_1 jednaka ništici. Točka je dakle P_1 ona točka pravca, koja je ujedno u ravnini Π_1; ona se zove prvo probodište pravca p ($P_1 \equiv P'_1$). Isto će tako točka P_2 biti ona točka pravca p, koja od Π_2 nema nikakve daljine; njezina je prva projekcija P'_2 u osi x. Točka je P_2 drugo probodište pravca p ($P_2 \equiv P''_2$).



Sl. 88.

Kad se pravac p preleže oko p' u Π_1 ili oko p'' u Π_2, mogu se upotrebiti oba njegova probodišta; inače ostaje postupak isti kao kod preloženja pruśca (gl. § **9.** i **20.**). Preložaji određuju s pripadnim projekcijama pravca prvi i drugi priklon α i β pravca p prema ravninama Π_1 i Π_2. Zbroj $\alpha + \beta$ priklonih kutova nekoga pravca s ravninama Π_1 i Π_2 ne može biti veći od 90^0. U slici 89. nacrtan je u kosoj projekciji pravac p zajedno s probodištima P'_1 i P'_2. Trokut je $P''_2 P'_2 P'_1$ pravokutan kod P'_2. Kut φ, što ga čini hipotenuza $P'_1 P''_2$ (ili p) s katetom $P''_2 P'_2$,



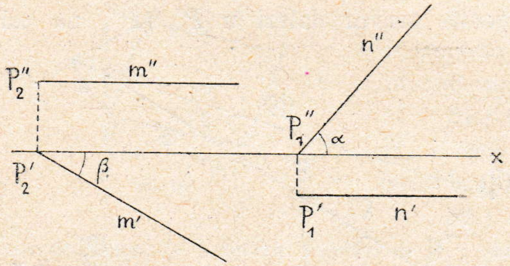
Sl. 89.

*

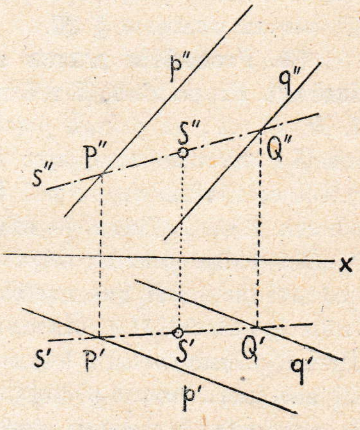
mora biti veći od priklonoga kuta β pravca p prema Π_2, jer je taj prikloni kut najmanji od svih kutova, što ih pravac p čini s pravcima kroz P''_2 u Π_2 (§ **6.**, *2*). Budući da je $\alpha + \varphi = 90^0$, a $\varphi > \beta$, mora biti $\alpha + \beta < 90^0$. Zbroj $\alpha + \beta$ bit će onda upravo jednak 90^0, ako je pravac p paralelan s pobočnom ravninom Π_3, t. j. ako je prema osi x priklonjen pod pravim kutom.

Prikloni kut β, što ga čini pravac m, koji je paralelan s Π_1, prema ravnini Π_2, vidi se u Π_1, a prikloni kut α prema Π_1, koji čini pravac $n \parallel \Pi_2$, vidi se u Π_2 (slika 90.).

36. Dva pravca. Dva paralelna pravca p i q imat će paralelne prve projekcije $p' \parallel q'$ i paralelne druge projekcije $p'' \parallel q''$ (gl. § **10.**). Uzme li se na p točka



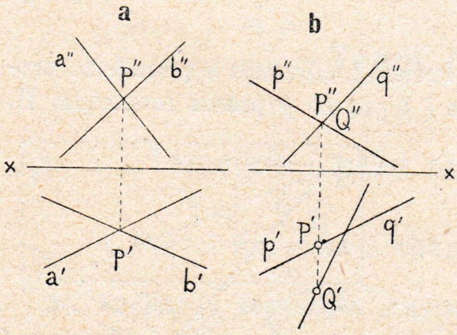
Sl. 90.



Sl. 91.

P (slika 91.), a na q točka Q, bit će pravac PQ sasvim u ravnini (pq) (isp. § **3.**, *6.* i *3.*). Izabere li se pak na $PQ \equiv s$ neka točka S, bit će i ona u ravnini (pq).

Ako se dva pravca a i b sijeku (raznosmjernice), bit će njihova zajednička točka P ujedno na a i na b. Projekcije sjecišta P, t. j. sjecišta prvih i drugih projekcija a', b' i a'', b'', moraju biti na istoj ordinali (slika 92. a). Takvim se pravcima može položiti ravnina (gl. § **3.**, *4*).



Sl. 92.

Dva mimosmjerna pravca p i q (slika 92. b) imaju druge projekcije p'' i q'', koje daju zajedničku točku $P'' \equiv Q''$, no ta točka nije projekcija zajedničke točke za oba pravca p i q u prostoru. Povučemo li naime kroz P'' ordinalu, sjeći će ona p' u P', a q' u Q'; točke su P i Q

različne, jer su različno udaljene od Π_2, samo im njihove druge projekcije padaju u istu točku $P'' \equiv Q''$. Kod mimosmjernih pravaca nije dakle sjecište $(p'\, q')$ u istoj ordinali sa sjecištem $(p''\, q'')$. Takvim se pravcima ne može položiti ravnina.

Zadaci za vježbu.

83.) Odredi prvo probodište pravca, koji ide točkom M (3, 2, 4), te s Π_1 čini priklon $\alpha = 60^0$. Koliko ima takvih pravaca? Nacrtaj onaj od njih, koji je paralelan s Π_2.

84.) Odredi obadva probodišta ovih pravaca: A (3, —1, 3) B (5, 1, 1); M (—2, —3, —1) N (1, —2, 3); P (1, 2, —4) Q (4, —2, 3).

85.) Prikaži u kosoj projekciji pravac A (1, 2, 3) B (4, 3, 1) i potraži kose slike njegovih probodišta s Π_1, Π_2 i Π_3 ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{3}$).

86.) Od pravca p poznata je prva projekcija p', točka A (3, 2, 2) toga pravca i prava dužina d od A do prvoga probodišta. Odredi p''; koliko ima rješenja?

87.) Prikaži pravac p, koji siječe os x, a priklon mu je $\beta = 30^0$; poznata je projekcija p''.

88.) Prikaži u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$) pravac $p \parallel x$, koji od Π_1 ima daljinu 3, a od Π_2 daljinu 4.

89.) Zadan je pravac m svojim projekcijama m', m'' i točka M (2, 3, —1) izvan m. Povuci kroz M pravac n, koji siječe m te je paralelan s Π_2.

90.) Prikaži kocku, kojoj je osnovka u Π_1, a jedna pobočka u Π_2. Koliki kut čini jedna prostorna dijagonala s Π_1?

91.) Nacrtaj projekcije dvaju pravaca m i n, koji se sijeku, ako je $m \parallel \Pi_1$, $n \perp \Pi_2$.

92.) Potraži projekcije točke, koja dijeli dužinu obadvaju probodišta pravca P_1 (0, 3, 0) P_2 (4, 0, 4) u omjeru 3 : 5. Kolika je prava veličina većega dijela?

93.) Odredi za općeno položen pravac p', p'' treću (pobočnu) projekciju i treće probodište.

94. Prikaži pravac m', m'' u projekciji sa strane (${}_1x_3$ čini s osju $x \sphericalangle \varphi = 60^0$), a onda odredi 2. projekciju one točke, u kojoj m siječe treću ravninu.

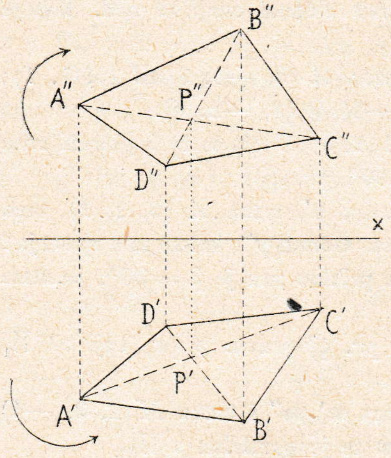
95.) Prikaži u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{2}{3}$) dva paralelna pravca zajedno s njihovim drugim projekcijama.

37. Ravnina i pravac. Ravnina će biti određena, ako se od nje zadadu projekcije odredbenih elemenata, koji su navedeni u § **3.**, *2*, *4*, *5* i *6*. Tako je u sl. 91. ravnina određena paralelnim pravcima p i q.

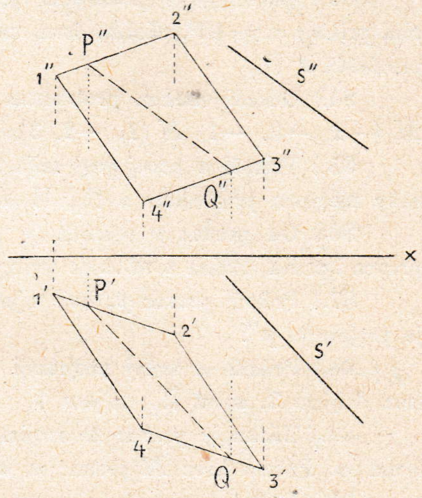
1. U slici 93. prikazana je ravnina σ raznosmjernicama AC i BD, koje se sijeku u točki P. Točke A i C na jednoj, a B i D na drugoj raznosmjernici određuju nepravilan četverokut, kojim je opet predočen dio iste one ravnine σ.

B i l j e š k a. Hoćemo li predočiti projekcije nekoga ravnoga četverokuta, moramo paziti na to, da mu sva četiri vrha budu u istoj ravnini, t. j. da mu se dijagonale s i j e k u (gl. u slici točku P!). Ako su dakle zadane projekcije triju vrhova A, B, C ravnoga četverokuta, kako će se odrediti neki četvrti vrh D?

2. Ravnina se može prikazati i trokutom, paralelogramom i t. d. (gl. § **21**.). U s l i c i 94. prikazan je dio ravnine paralelogramom 1, 2, 3, 4. U toj



Sl. 93.



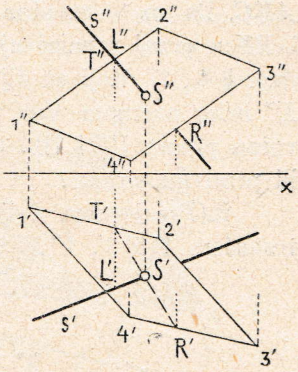
Sl. 94.

je ravnini sadržan pravac PQ; točka je P na stranici 1 2, dakle P'' na 1''2'', a P' na 1'2'; točka je pak Q na 3 4, dakle Q'' na 3'' 4'', a Q' na 3'4'. Povučemo li gdjegod $s'' \parallel P''Q''$, $s' \parallel P'Q'$, bit će pravac s paralelan s ravninom 1 2 3 4 (gl. § **4.**, *1*).

Ravnina, koja je na pr. prikazana četverokutom kao u sl. 93. i 94., može biti tako položena u prostoru, da se u Π_1 i Π_2 vide r a z l i č n e njezine strane kao u sl. 93., ili da je ista njezina strana vidljiva u Π_1 i Π_2 kao u sl. 94. I s t a će se strana ravnine vidjeti u obje projekcije onda, ako je smisao, u kojem slijede vrhovi četverokuta, t. j. 1, 2, 3, 4 (sl. 94.), i s t i u Π_1 i u Π_2 (od lijeva na desno!). Naprotiv pokazuje ravnina r a z l i č n e svoje strane u Π_1 i Π_2, ako je smisao, u kojem slijede vrhovi $A\ B\ C\ D$ (u sl. 93.) p r o t i v a n z a Π_1 i Π_2. Oba su protivna smisla naznačena u sl. 93. strjelicama, prema kojima treba redom čitati slova na vrhovima.

3. P r o b o d i š t e p r a v c a s ravninom ona je točka toga pravca, koja je ujedno u zadanoj ravnini. U s l i c i 95. prikazana je ravnina paralelogramom 1'2'3'4', 1''2''3''4'', a pravac s projekcijama s' i s'' (isporedi postupak u § **14.**, *c*).

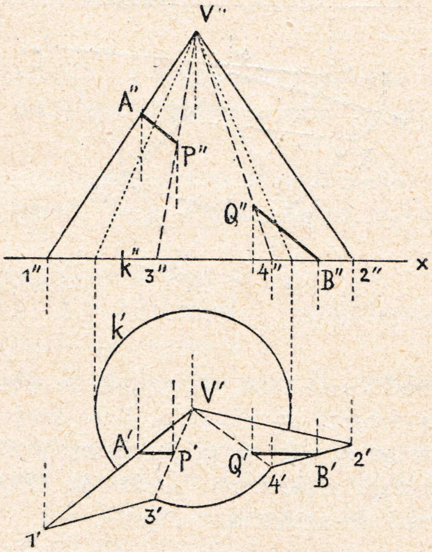
Zamislit ćemo, da u drugu projekciju s'' pada ujedno i druga projekcija nekog pravca $T'' R''$, koji je u ravnini paralelograma. Prva projekcija T' bit će u ordinali na $1' 2'$, a R' u ordinali na $3' 4'$; prema tome je poznata i prva projekcija $T' R'$ pomenutoga pravca. Budući da su pravci s i TR u istoj ravnini (koja je normalna na Π_2, jer projekcije s'' i $T'' R''$ padaju zajedno), morat će se oba pravca sjeći. Sjecište S vidi se u prvoj projekciji u S', a druga je projekcija S'' u ordinali i na s''. Točka je S u istini na pravcu s, a ujedno i u ravnini 1 2 3 4, jer je na pravcu TR, koji pripada toj ravnini; zato je S probodište pravca s s ravninom 1 2 3 4.



Sl. 95.

Jedan dio pravca s bit će zakriven ravninom paralelograma. Da se odredi, je li dio na lijevo od probodišta S u Π_2 vidljiv ili zakriven, produžit će se na pr. ordinala točke T, dok siječe s' u L'; druga projekcija L'' pada u T''. Iz prve projekcije izlazi, da je točka L odmaknuta dalje ispred Π_2 negoli T. Prema tomu se dio LS pravca nalazi pred ravninom 1 2 3 4 te je zato vidljiv. Odredi vidljivost, ako četverokut (sl. 93.) pokazuje u Π_1 i Π_2 različne strane!

U slici je 96. prikazan u obje projekcije uspravni kružni stožac s vrhom V i osnovkom k u Π_1, dalje pravac projekcijama $A' B'$, $A'' B''$. Da se odrede obje probodišne točke, u kojima taj pravac siječe oplošje stošca, položit ćemo vrhom V i točkama A, B ravninu, koja je omeđena trokutom V 1 2. Najprije je određeno probodište $1'$, onda je povučen pravac $1' B'$, a točka je $2'$ izabrana po volji na $1' B'$. Stranica je 1 2 toga trokuta u Π_1; ona siječe osnovku stošca u točkama 3 i 4. Presjek stošca s ravninom trokuta činit će dakle obje izvodnice $V3$ i $V4$. Pravac AB siječe te izvodnice u traženim probodištima P i Q, jer su te točke na zadanom pravcu i na površini stošca. Pazi na dijelove, koji se vide u Π_1 i Π_2!

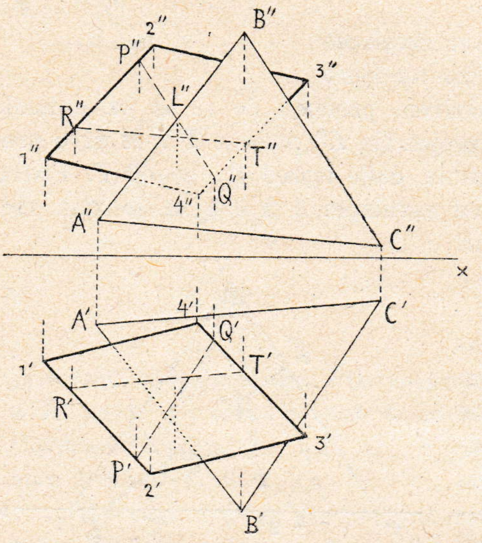


Sl. 96.

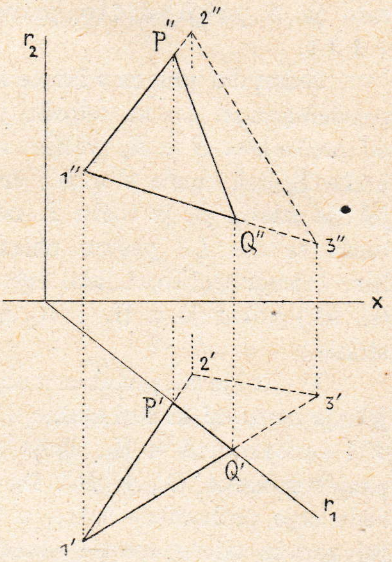
38. Dvije ravnine. Dvije su ravnine ili paralelne ili se sijeku u pravcu, koji se zove p r e s j e č n i c a njihova.

1. U s l i c i 97. prikazane su u projekcijama dvije ravnine 1 2 3 4 i *ABC*. Da su te ravnine p a r a l e l n e, pokazuje se time, što su pravci *PQ* i *RT* u prvoj ravnini ujedno paralelni s pravcima *BC* i *AC* druge ravnine (isp. § **4.**, *2*). Koji su dijelovi ravninâ zakriveni, odredit će se na pr. točkom *L''* istim načinom kao u § **37.**, 3. Razjasni pobliže položaj obadviju ravnina prema Π_1 i Π_2! Obraćaju li ravnine istu stranu ravninama projekcijâ ili protivnu stranu?

2. Presječnica dviju ravnina (s l i k a 98.), od kojih je jedna zadana trokutom 1' 2' 3', 1'' 2'' 3''', a druga je $\rho \perp \Pi_1$ određena tragovima r_1 i r_2,



Sl. 97.



Sl. 98.

naći će se tako, da se odrede probodišta stranicâ 1 2 i 1 3 prve ravnine s drugom ravninom ρ. Prve projekcije probodištâ *P* i *Q* bit će u prvom tragu r_1 i to na projekcijama 1' 2' i 1' 3'; druge se projekcije *P''*, *Q''* dobivaju ordinalama. Trokut je 1*PQ* pred ravninom ρ, pa se zato potpuno vidi do presječnice *PQ*.

Slična je zadaća riješena u kosoj projekciji (s l i k a 99.) za obje ravnine 1 2 3 4 i *ABC*, gdje je prikrata izabrana po volji.

Pružac *T' R'* na stranici *A' B'* trokuta u Π_1 znači ujedno prvu projekciju prušca *TR*, koji je u ravnini paralelograma. Iz kose projekcije izlazi,

da se AB i TR, koji su u istoj ravnini ($\perp$ Π_1), sijeku u točki $\overline{P}$ presječnice. Istim se načinom na prušcu $\overline{U}\,\overline{V}$ dobiva druga točka $\overline{Q}$ presječnice $\overline{P}\overline{Q}$.

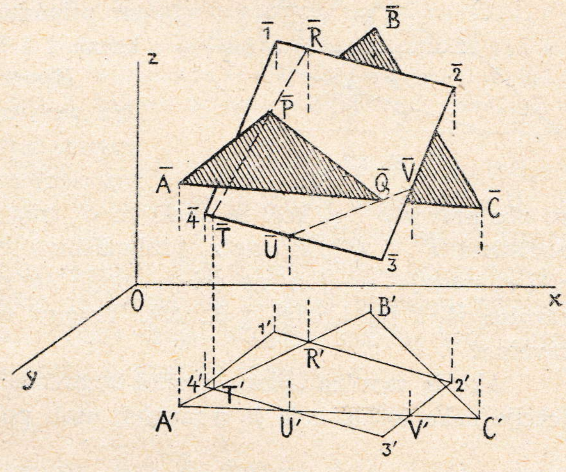
Bilješka. Ako treba odrediti presječnice pobočaka neke prizme ili piramide s ravninom, koja je zadana trokutom ili četverokutom, postupat će se posve istim načinom za zadanu ravninu i za pojedine pobočke tijela. Sve će presječnice zajedno dati presječni lik ravnine sa zadanim tijelom.

Zadaci za vježbu

96.) Ravnina je zadana s dva raznosmjerna pravca; pretvori to određenje u drugo tako, da ista ravnina bude zadana trokutom.

97.) Ravnina je zadana trokutom A (1, 2, 4·5) B (—2, 3, 2) C (4, 4, 5); pretvori to određenje u drugo tako, da ista ravnina bude zadana dvjema paralelnim pravcima.

98.) Ravnina je zadana s dva raznosmjerna pravca; odredi probodište te ravnine s nekim zadanim pravcem.



Sl. 99.

99.) Od pravokutnika je jedna stranica u Π_2, a njoj suprotna stranica u Π_1. Odredi probodište toga četverokuta s nekim kosim pravcem tako, da upotrebiš pobočnu projekciju.

100.) Položi u jedan od dva zadana mimosmjerna pravca stranicu paralelograma, za koji će središte biti na drugom pravcu. To je središte ujedno probodište drugoga pravca s paralelogramom!

101.) Predoči sliku 98. u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, $pr. = \frac{1}{3}$).

102.) Odredi drugu projekciju likova 1 2 3 4 i ABC zajedno s presječnicom PQ u slici 99. Nađi projekciju P' Q' presječnice na ravninu x y.

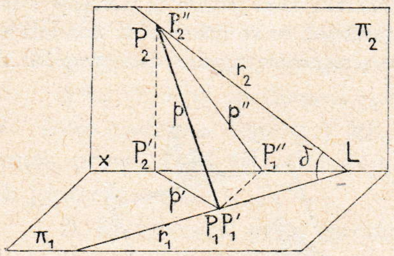
103.) Presijeci kosu trostranu piramidu, kojoj je osnovka u Π_1, nekom ravninom, koja je zadana trokutom ABC.

104.) Osim ravnine ABC u zad. 97. zadana je još točka P (1·5, 2, 6), položi točkom P kakovgod trokut, koji će biti paralelan s ABC (gl. sl. 97.)

105.) Zadana su dva trokata ABC i 1 2 3, kojima se stranice AB i 12 sijeku u točki P. Odredi još jednu točku Q njihove presječnice.

39. Određenje ravnine tragovima. Uzet ćemo pravac p, koji ima prvo i drugo probodište P'_1 i P''_2 (slika 100.), a osim toga ćemo u osi x izabrati točku L. Pravac p i točka L određuju ravninu ρ. Pravci $LP'_1 \equiv r_1$

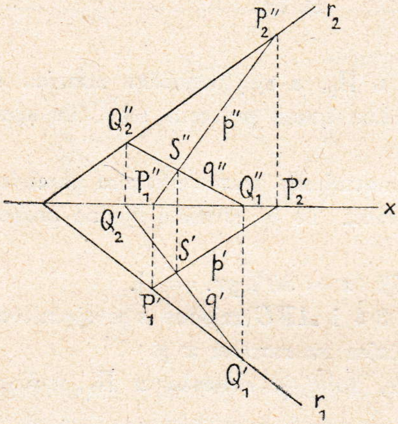
i $LP''_2 \equiv r_2$ pripadaju toj ravnini; ujedno je prvi od njih u ravnini Π_1, drugi u Π_2. Pravci su r_1 i r_2 t r a g o v i ravnine ρ; probodišta pravca p, koji je u ravnini ρ, bit će dakle svagda u tragovima te ravnine (isp. § **3.**, *12. 14*). Tragovi ravnine, koja je u prostoru obilježena grčkim slovom, na pr. α, obilježeni su pripadnim latinskim slovom i indeksima 1 i 2 (a_1 i a_2). Isp. § **2.**



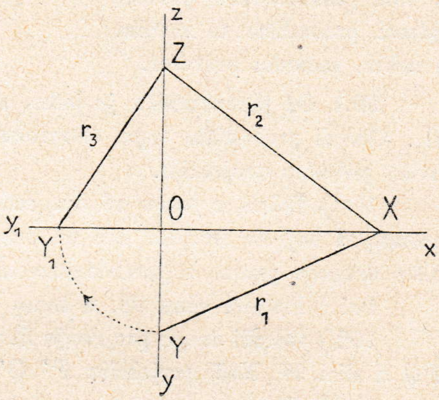
Sl. 100.

Mjesto točke i pravca možemo uzeti dva pravca, koji se sijeku, pa odrediti tragove ravnine, koja se može položiti tim raznosmjernicama. U s l i c i 101. uzeta su oba pravca p i q, koji se sijeku u S; trag r_1 njihove ravnine ρ ide probodištima P'_1 i Q'_1, a trag r_2 probodištima P''_2, Q''_2 tih pravaca. Tragovi r_1 i r_2 moraju se sjeći na osi x, jer je to sjecište zajednička točka triju ravnina Π_1 i Π_2 i ρ (gl. § **3.**, *15*). Tragovi su dva „raznosmjerna" pravca ravnine!

Ako je ravnina zadana svojim tragovima r_1 i r_2, ne mogu se obje projekcije neke točke, koja je u ravnini, uzeti po volji. Može se izabrati jedna



Sl. 101.



Sl. 102.

projekcija, na pr. S' (sl. 101.); položi li se kroz S' kakogod prva projekcija q' nekoga pravca q, koji je u ravnini, pa se odredi druga njegova projekcija $q'' \equiv Q''_2\, Q''_1$, bit će S'' na q'' u ordinali projekcije S'.

Treći je trag r_3 ravnine ρ presječnica njezina s pobočnom ravninom Π_3; tragovi r_1 i r_3 sjeći će se na osi y, a tragovi r_2 i r_3 na osi z (s l i k a 102.).

Da se položaj ravnine odredi što kraće brojevima, zadat će se daljina OX od početne točke O do sjecišta tragova na x, dalje daljina OY zajedničke točke traga r_1 i osi y od O, napokon daljina točke Z, u kojoj r_2 siječe z, od početne točke O. Ravnina će se dakle zadavati na pr. ukratko ovako ρ (2, 1, 1·5); to zapravo znači, da su od ravnine zadane tri osobite točke X, Y i Z. Ako je X na lijevo od O ili Y nad O ili Z pod O, bit će dotična dužina OX, OY ili OZ obilježena negativno, na pr. σ (—2, 1, —2).

Bilješka. Oba traga r_1 i r_2 zatvaraju u prostoru neki kut δ (sl. 100.). Kad se ravnina π_1 zaokrene oko osi x dolje u π_2, zaokrenut će se s π_1 i trag r_1. Zato u sl. 101. oba traga r_1 i r_2 ne čine više onoga kuta δ, koji oni zatvaraju u prostoru. (Određenje toga kuta provest će se u § **52.**).

Ravnina ρ u sl. 101. obraća istu svoju stranu prema Π_1 i Π_2; ravnina pak τ u sl. 106. obraća različne svoje strane prema Π_1 i Π_2. Sve ravnine, koje imaju isti prvi trag na pr. r_1, a različne druge tragove: $s_2, t_2, m_2, \ldots$, dijele se u dvije skupine, koje su rastavljene onom ravninom, kojoj je trag $n_2 \perp x$. Ravnine jedne od tih skupina obraćaju ravninama projekcijâ istu svoju stranu, ravnine druge skupine različne svoje strane. Nacrtaj nekoliko ravnina za svaku pomenutu skupinu!

Zadaci za vježbu.

106.) Predoči tragove ravnine, koja ide točkom A (1, 3, 4) i pravcem P (3, 5, 2) Q (—2, 1, 1·5). Uzmi na PQ kojugod točku B i odredi probodišta za PQ i za AB!

107.) Predoči ravnine: λ (1, 4, 2), μ (—3, —1, 4), ν (—1, 2, —3), σ (1, —1, 4) τ (2, 3, —1); ρ (2, 3, ∞), $\varkappa$ (—1, ∞, 2). Kakov položaj imaju obje ravnine ρ i $\varkappa$ prema Π_1 i Π_2?

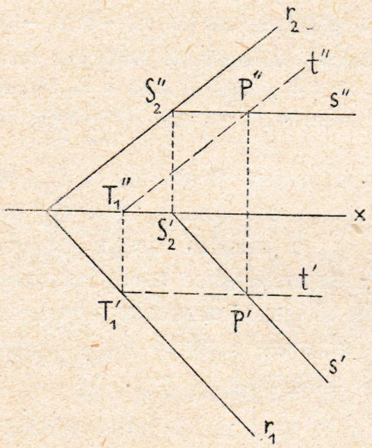
108.) Odredi tragove ravnine, koja ide točkama A (2, 1, 3), B (1, 4, 2), C (—2, 3, 5). Nađi probodišta pravaca AB i AC; dosta je da nađeš dva probodišta u Π_1 i jedno u Π_2!

109.) Jedna je točka M zadana u Π_1 : M (2, 3, 0), druga u Π_2 : N (3, 0, 2), a treća P u prostoru: P (—2, 2, 4). Odredi tragove ravnine, koja ide tim točkama.

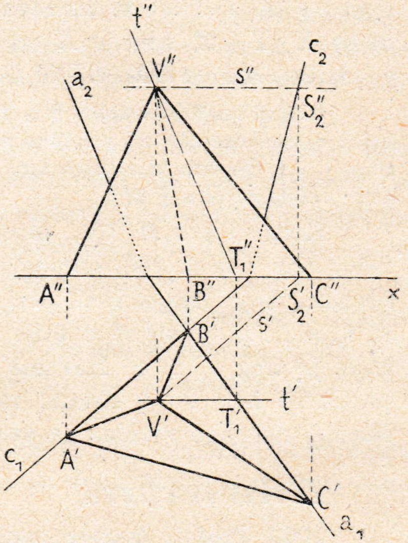
110.) Nacrtaj tragove ravnine, koja je paralelna s osi x, ili koja je normalna na Π_1 i Π_2, ili koja je paralelna s Π_1, dotično s Π_2.

40. Sutražnice za prvi i za drugi trag ravnine. U § **13.** pokazano je, da je sutražnica pravac ravnine, koji je paralelan s tragom ravnine. „Sutražnice za prvi trag" ili „sutražnice 1. skupine" paralelne su s prvim tragom, a sutražnice za drugi trag ili „sutražnice 2. skupine" paralelne su s drugim tragom. U slici 103. prikazana je u ravnini ρ (tragovi r_1 i r_2) sutražnica s', s'' prve skupine i sutražnica t', t'' druge skupine. Obje su sutražnice položene točkom P ravnine ρ. Probodišta su T'_1 i S''_2 sutražnicâ t i s s Π_1 i Π_2 u tragovima r_1 i r_2 ravnine.

Hoćemo li u ravnini r_1, r_2 odrediti točku P, možemo jednu njezinu projekciju, na pr. P', uzeti posve po volji; druga je projekcija već posve određena. Tu ćemo projekciju P'' moći i tako naći, da kroz P' položimo



Sl. 103.



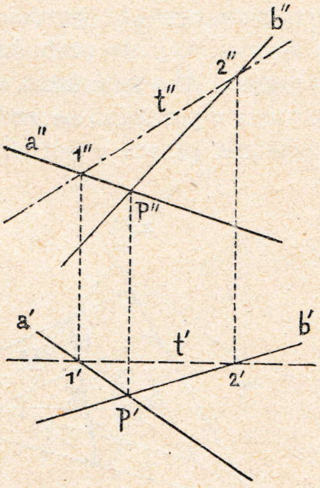
Sl. 104.

prvu projekciju sutražnice $s' \parallel r_1$ ili $t' \parallel x$. Druga projekcija $s'' \parallel x$ dotično $t'' \parallel r_2$ sadržavat će P'', gdje je P'' osim toga i na ordinali kroz P'. Gledaj drugačije određenje u § **39.** za točku S.

U slici 104. prikazane su obje projekcije trostrane piramide, kojoj je osnovka ABC u Π, a vrh V točka, izabrana po volji u prostoru. Pobočka VAB određuje ravninu γ, kojoj ćemo naći tragove c_1 i c_2. Produžena stranica AB osnovke daje već trag c_1; vrhom V možemo položiti sutražnicu s 1. skupine, kojoj je projekcija $s' \parallel c_1$, a druga projekcija $s'' \parallel x$. Nacrtno je ili drugo probodište te sutražnice točka S''_2, kojom mora ići drugi trag c_2. Taj ćemo trag dobiti kao spojnicu točke S''_2 i sjecišta (c_1, x). U istoj je slici određena tragovima a_1 i a_2 ravnina α pobočnoga trokuta VBC piramide, i to s pomoću sutražnice $t' \parallel x$, $t'' \equiv V'' T''_1$.

Sutražnica će se odrediti lako i onda, ako je ravnina zadana s dva raznosmjerna (ili paralelna) pravca a, b, a tragovi joj nijesu ni poznati (slika 105.). Budući da će jedna projekcija, na pr. t', sutražnice biti paralelna s osi x, povući će se sjecištima $(a'\ t')$ i $(b'\ t')$ ordinale, koje daju na a'' i b'' druge projekcije dviju točaka sutražnice. Tako je dobivena projekcija t'' sutražnice, koja ima isti smjer kao i drugi trag ravnine $(a\ b)$. Sličnim bismo načinom

dobili i neku sutražnicu 1. skupine. Za to određenje nije nužno da znamo, gdje je os x; potrebno je samo znati, koji smjer moraju imati ordinale! Kad se ispušta os x, hoće se time reći, da nam je posve svejedno, koju daljinu imaju pojedine točke i pravci od Π_1 i Π_2; ujedno se u tom slučaju ravnina ne predočuje tragovima, jer bi se tragovi mogli odrediti samo osju x, pa bi ona zato morala biti nacrtana!



Sl. 105.

Zadaci za vježbu.

111.) Zadana je ravnina ρ (3, 1, 2) i prva projekcija trokuta A (—3, 1, ?) B (—2, 2, ?), C (0, 0·5, ?); odredi drugu projekciju trokuta tako, da taj bude u ravnini ρ.

112.) Prikaži pravac p ravnine λ (—4, —2, 3), paralelan s Π_1 i od te ravnine Π_1 udaljen za $v = 2$.

113.) Izaberi u ravnini μ (2, —3, 2) točku P i odredi sutražnicu q za treći trag, koja ide točkom P. Nađi sve tri projekcije q', q'', q'''.

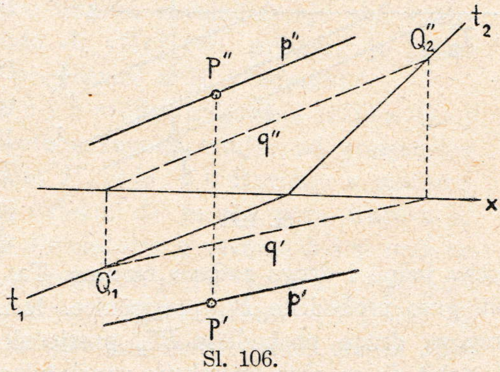
114.) Odredi tragove dviju ravnina μ i ν, koje prolaze pravcem $p \parallel \Pi_1$.

115.) Zadan je trokut A (—2, 3, 4) B (1, 1·5, 2) C (3, —2, 5); nacrtaj projekcije pravca l, koji je u ravnini trokuta te paralelan s Π_2, a da ne upotrebiš tragove.

116.) U ravnini ρ (5, 3, 2) izabrana je neka sutražnica prve skupine; nađi probodište te sutražnice s ravninom Π_3.

117. Zadana je prva projekcija nepravilnoga peterokuta, a od druge su projekcije poznata tri njegova susjedna vrha; odredi druge projekcije ostalih dvaju vrhova. Upotrebi dva načina, prema § **37.**, 1. ili § **39.** (zad. 108.).

118.) Prikaži projekcije nekoga paralelograma u ravninu μ (—3, 4, 5), kojemu su dvije suprotne stranice sutražnice jedne skupine, a druge dvije stranice sutražnice druge skupine.



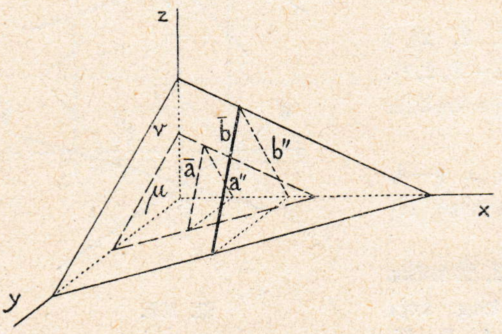
Sl. 106.

41. Pravac paralelan s ravninom. Paralelne ravnine. 1. Ako je zadana ravnina τ svojim tragovima t_1 i t_2, pa nekom točkom P prostora treba položiti kojigod pravac p, koji je s τ paralelan, položit će se u ravnini τ kakovgod

pravac q, a onda će se kroz P' povući $p' \parallel q'$ i kroz P'' $p'' \parallel q''$ (isp. § 37., 2).

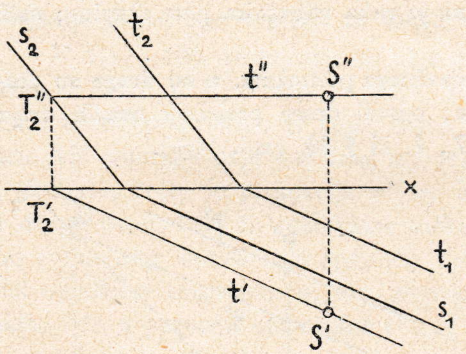
Ako treba ispitati, je li zadani pravac p', p'' paralelan sa zadanom ravninom $\tau \equiv t_1, t_2$, povući će se $q' \parallel p'$ i odrediti q'' tako, da je q pravac u ravnini, t. j. da probodišta Q'_1 i Q''_2 pravca q budu u tragovima t_1 i t_2 ravnine τ. Ako se pokaže, da je i $q'' \parallel p''$, bit će $p \parallel \tau$. Treba li pak položiti ravninu τ paralelno sa zadanim pravcem p, položit će se $q \parallel p$, a onda probodištima pravca q povući tragovi t_1 i t_2 po volji (gl. § 4., 5).

2. U slici 107. prikazana su dva paralelna pravca a i b svojim kosim projekcijama $\bar{a}$ i $\bar{b}$ i drugim normalnim projekcijama a'' i b''. Prvim je pravcem a položena ravnina μ, a drugim b ravnina ν tako, da je $\mu \parallel \nu$. Pripadni su tragovi tih paralelnih ravnina paralelni (gl. 4., 7).



Sl. 107.

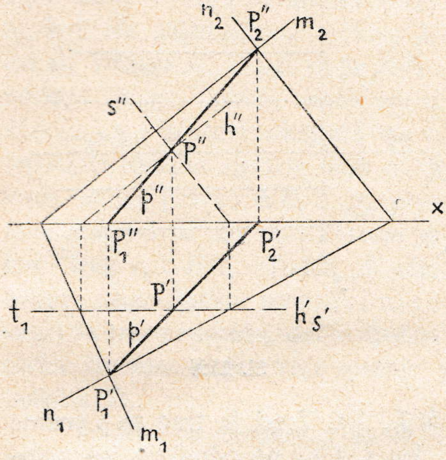
Ako je zadana ravnina τ svojim tragovima t_1 i t_2 (slika 108.), pa nekom točkom S', S'' treba položiti ravninu $\sigma \parallel \tau$, povući će se kroz S' prva projekcija t' sutražnice za prvi trag t_1; t'' ići će točkom S'' paralelno s x. Drugim probodištem T''_2 te sutražnice ići će trag s_2 tražene ravnine σ paralelno s t_2, a sjecištem s_2x ide trag $s_1 \parallel t_1$ te ravnine. Točka je S zaista u σ, jer je na sutražnici t ravnine σ, a ujedno je $\sigma \parallel \tau$, jer su istoimeni tragovi paralelni.



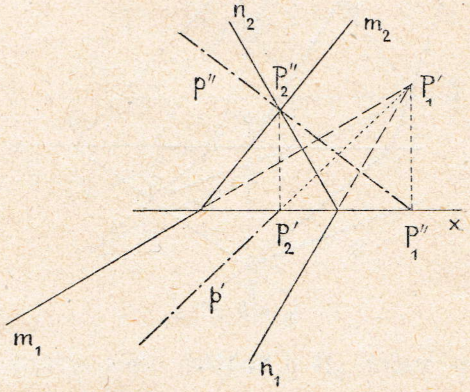
Sl. 108.

42. Presječnica dviju ravnina. Dvije ravnine μ i ν, koje su zadane tragovima m_1, m_2 i n_1, n_2 (slika 109.) sijeku se u presječnici p. Točka P'_1, u kojoj se sijeku oba prva traga m_1 i n_1, pripada presječnici, jer je to jedna zajednička točka jedne i druge zadane ravnine. Ta je točka ujedno u Π_1, pa će zato biti prvo probodište P'_1 presječnice. Iz istih će razloga biti sjecište drugih tragova drugo probodište P''_2 presječnice. Odredimo li još P''_1 i P'_2 na x, dobit će se obje projekcije presječnice $p' \equiv P'_1 P'_2$ i $p'' \equiv P''_1 P''_2$.

Zamislimo, da je položena kojagod ravnina $\tau \parallel \Pi_2$; njezin će prvi trag t_1 biti paralelan s x. Ta će ravnina sjeći ravninu μ u pravcu h, kojemu je prva projekcija h' u t_1. Pravac je h sutražnica 2. skupine za μ, zato je $h'' \parallel m_2$. Ravnina će τ sjeći isto tako ravninu ν u sutražnici s druge skupine, za koju je opet s' u t_1, a $s'' \parallel n_2$. Obje će se sutražnice h i s sjeći u točki P, koja pripada presječnici; u toj se naime točki sijeku tri ravnine μ, ν i τ. Dobit će se dakle $P'' \equiv (h'' s'')$, a P' je u ordinalu na t_1.



Sl. 109.



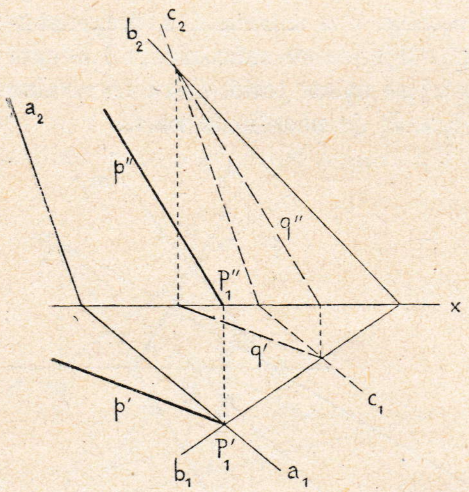
Sl. 110.

Druga koja točka Q presječnice može se dobiti opet tako, da se položi ravnina $\sigma \parallel \Pi_1$, pa da se dalje postupa kao kod ravnine τ. Presječnica će p biti određena s obje točke P i Q, tako da se sjecišta tragovâ m_1, n_1 i m_2, n_2 i ne moraju upotrebiti. Takovim će se načinom određivati projekcije p', p'' presječnice onda, ako se prvi ili drugi tragovi ili oba para tragova ne sijeku na dohvatu u ravnini crtnje.

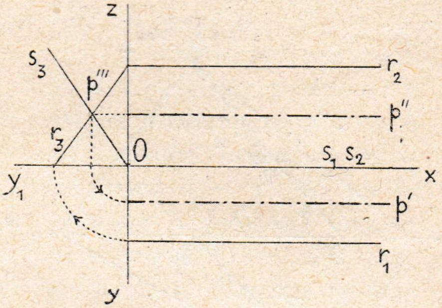
Određenje presječnice p s pomoću tragova ravninâ ostaje isto, kakogod su položeni tragovi zadanih ravnina. U slici 110. prikazan je jedan takov slučaj, gdje je prvo probodište presječnice u II. kvadrantu.

Neka budu zadane dvije ravnine α i β svojim tragovima (slika 111.) tako, da se a_2 i b_2 ne sijeku na dohvatu u ravnini crtnje; od presječnice p poznato je dakle samo prvo probodište $P'_1 \equiv (a_1, b_1)$. Ravninu α možemo pomaknuti paralelno u položaj γ tako daleko, da se oba para tragova b_1 i c_1, te b_2 i c_2 sijeku u okviru crtnje. Presječnica q ravninâ β i γ naći će se sad istumačenim načinom, a onda će se povući $p' \parallel q'$ kroz P'_1 i $p'' \parallel q''$ kroz P''_1. Pravci p i q, u kojima ravnina β siječe ravnine α i γ, bit će naime paralelni (isp. § **4.**, 7). Isto će se tako postupati i onda, ako se oba para tragova ne sijeku u okviru crtnje; uzato će se upotrebiti način u sl. 109.

U slici 112. određene su projekcije presječnice p dviju ravnina ρ i σ, od kojih je prva paralelna s osi x, a druga je položena kroz os x; oba su traga s_1 i s_2 te druge ravnine u osi x. Obje su ravnine normalne na pobočnoj ravnini Π_3; njihova će presječnica biti opet

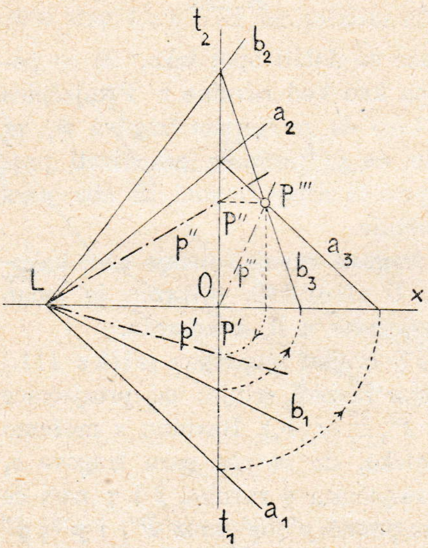


Sl. 111.



Sl. 112.

okomita na Π_3, t. j. paralelna s osi x (gl. § **7.**, 7.). Treći je trag za ρ pravac r_3, a treći trag s_3 za σ mora biti zadan, jer s_1 i s_2 ne određuju još položaja za tu ravninu. Točka je $p''' \equiv (s_3, r_3)$ treća projekcija tražene presječnice p, a p' i p'' dobivaju se poznatim načinom (isp. § **30.**).

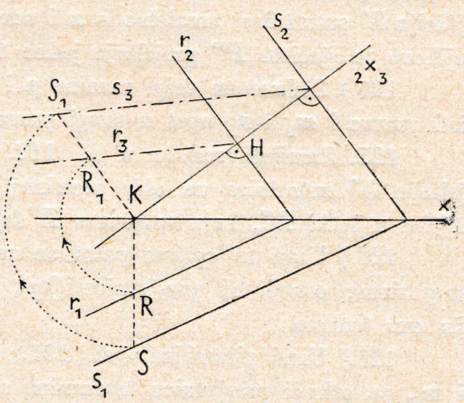


Sl. 113.

Slično će biti rješenje za presječnicu p dviju ravnina α i β, koje prolaze istom točkom L na osi x (slika 113.). Točka će L pripadati presječnici, jer je ona zajednička točka za obje ravnine. Da se odredi još jedna točka P presječnice, položit će se nekom točkom O osi x ravnina $\tau \perp x$ i potražiti njezini presjeci a_3 i b_3 s α i β. Ravnina τ ima ovdje isto značenje kao inače pobočna ravnina Π_3. Sjecište P''' pravaca (tragova) a_3 i b_3 bit će treća projekcija tražene točke P; ta točka pripada naime i ravnini α i ravnini β, jer je ujedno na tragovima a_3 i b_3 tih ravnina. Druga je projekcija P'' na t_2, a prva projekcija P' na t_1.

Obje su projekcije tražene presječnice: $p' \equiv LP'$ i $p'' \equiv LP''$; treća je projekcija na τ $p''' \equiv OP'''$.

Ako je neka ravnina ρ, zadana tragovima r_1, r_2, u općenu položaju prema Π_1 i Π_2 (slika 114.), može se učiniti, da bude normalna na trećoj ravnini projekcija. Neka bude ${}_2x_3 \perp r_2$ nova os (treća je ravnina normalna na Π_2; isp. § **31.**). Ravnina će ρ sjeći treću ravninu u novom tragu r_3, koji ide zajedničkom točkom H osi ${}_2x_3$ i traga r_2. Druga će se točka novoga traga dobiti, ako se u $K \equiv (x, {}_2x_3)$ postavi okomica na x i potraži njezino sjecište R s r_1, a onda se na pravac $KR_1 \perp {}_2x_3$ prenese KR od K do R_1. Traženi je treći trag $r_3 \equiv HR_1$. Točka R nije drugo nego točka presječnice za ρ i za treću ravninu, dakle ujedno točka trećega traga, koja poslije preloženja treće ravnine u Π_2 dolazi u položaj R_1.



Sl. 114.

Tragovi su ravnine ρ za Π_2 i Π_3 pravci r_2 i r_3; a kako je $r_2 \perp {}_2x_3$, bit će ravnina ρ normalna na Π_3 (gl. § **22.**).

Posve istim načinom možemo odrediti treći trag s_3 ravnine σ, koja je paralelna s ravninom ρ. Oba će treća traga r_3 i s_3 biti opet paralelna (§ **4.**, 7). Kako su sad obje ravnine ρ i σ normalne na Π_3, vidi se njihova daljina u pravoj veličini u Π_3; razmak tragova r_3 i s_3 bit će naime ujedno udaljenost ravninâ ρ i σ. Takova se dakle udaljenost može odrediti promjenom jedne ravnine projekcijâ (transformacijom).

Zadaci za vježbu.

119.) Odredi presječnicu ravnine ρ (—3, 4, 2) i ravnine σ (2, 2, ∞).

120.) Nađi projekcije za presječnicu dviju ravnina, od kojih je jedna zadana tragovima, a druga dvama paralelnim pravcima.

121.) Odredi presječnicu ravnine ρ (6, 2, 3) i ravnine istovetnosti ι, koja ide osju x te raspolavlja prikloni kut ravninâ Π_1 i Π_2 u II. (i IV.) kvadrantu (isp. zad. 68.).

122.) Odredi presječnicu ravnine ρ (∞, 3, 2) i ravnine sumjerenosti σ, koja raspolavlja prikloni kut ravninâ Π_1 i Π_2 u I. (i III.) kvadrantu. Presječnica će imati projekcije simetrične prema osi x. Zašto?

123.) Osju x i točkom T (2, 4 3) položi ravninu i odredi njezinu presječnicu s ravninom, koja je u udaljenosti 5 paralelna s Π_2.

124.) Zadana je ravnina τ, kojoj tragovi t_1 i t_2 padaju u isti pravac, priklonjen prema osi x. Uzmi 3. ravninu projekcija Π_3 tako, da bude $\tau \perp \Pi_3$.

125.) Dvije su ravnine zadane: α s dva paralelna pravca, β s dva raznosmjerna pravca. Potraži presječnicu njihovu, ako os x nije poznata. Uzmi 1. projekciju h' sutražnice paralelno s x i odredi druge projekcije h''_1 i h''_2 za α i β; njihovo je sjecište P'' projekcija jedne točke na presječnici!

126.) Zadane su dvije ravnine μ i ν tragovima tako, da m_1 i n_2 padaju u isti pravac i m_2 i n_1 opet u drugi pravac. Odredi presječnicu za μ i ν.

127. Razriješi zadaću u sl. 113. tako, da položiš drugu zajedničku projekciju h'' sutražnice za obje ravnine; prve se projekcije sutražnicâ h'_1 i h'_2 sijeku u točki M', koja spojena s L daje p'.

128.) Uzmi tri općeno položene ravnine λ, μ i ν, od kojih je svaka zadana tragovima; odredi tri presječnice $(\lambda\mu)$, $(\lambda\nu)$ i $(\mu\nu)$ i pazi na to, da sve tri idu istom točkom.

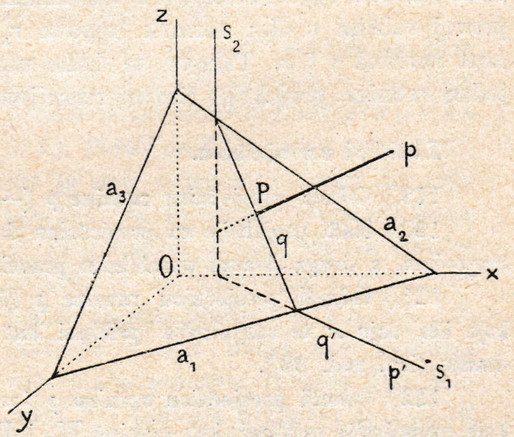
129.) Uzmi piramidu u sl. 104., izaberi kojugod ravninu μ tragovima m_1 i m_2, pa odredi presječnicu te ravnine s pobočkom VBC.

130.) Predoči u kosoj projekciji presječnicu dviju ravnina, od kojih je jedna paralelna s osi x.

131.) Zadana su dva mimosmjerna pravca a i b i točka P izvan njih; povuci kroz P pravac p, koji će sjeći a i b. Položi ravnine Pa i Pb, a onda traži njihovu presječnicu.

43. Probodište pravca s ravninom. Kao što u § **14.**, c i **37.**, 3, dobit će se probodište P pravca p s ravninom α tako, da se kroz p položi kojagod ravnina σ i potraži presječnica $(\sigma\alpha) \equiv q$. Zajednička točka P za q i za p bit će traženo probodište. Ta je naime točka na pravcu p i ujedno u α, jer je na pravcu q te ravnine.

Ta je zadaća razriješena u kosoj projekciji (slika 115.); ravnina je σ položena kroz p normalno na Π_1, njezin je dakle trag s_1 u prvoj projekciji p' zadanoga pravca. Drugi je trag $s_2 \perp x$. Presječnica q za σ i α siječe p u probodištu P.



Sl. 115.

U slici 116. razriješena je ista zadaća u normalnim projekcijama za drugi neki položaj ravnine $\alpha \equiv a_1, a_2$ i pravca p', p''. I tu je pravcem položena normalna ravnina σ na Π_1. Njezin je prvi trag s_1 u p', a $s_2 \perp x$. Odredi li

se poznatim načinom presječnica q (njezina 1. projekcija q' pada u s_1), dobit će se P'' u sjecištu pravaca p'' i q''; P' je u ordinali na q'. Koji je dio pravca p pred ravninom α?

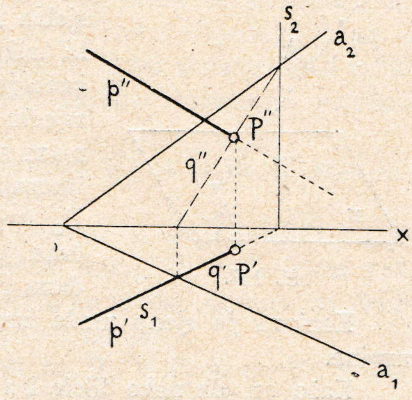
Zadaci za vježbu.

132.) Odredi probodište pravca p', p'' s ravninom istovetnosti (gl. zad. 121.) Upotrebi pobočnu ravninu Π_3.

133.) Odredi probodište pravca t', t'' s ravninom sumjerenosti (gl. zad. 122.).

134.) Odredi zajedničku točku za ravnine $\lambda(-4, 5, 3)$, $\mu(4, 2, 5)$, $\nu(-2, 3, 3)$ tako, da potražiš presječnicu za dvije ravnine, a onda probodište presječnice s trećom.

135.) Odredi probodište u sl. 116. tako, da pravcem p položiš ravninu $\tau \perp \Pi_2$.



Sl. 116.

136.) Odredi probodišta pravca p s piramidom u sl. 104. tako, da odrediš tragove za pobočne ravnine piramide. Jedan pobočni trokut ne će pravac p sjeći. Isp. rješenje u sl. 51., koje se osniva na drugom postupku.

137.) Zadan je pravac $p \parallel x$, daljina $p'x = 3$, $p''x = 5$; nađi probodište toga pravca s ravninom σ (2, 3, —3).

138.) Položi točkom T (1, 3, 2) pravac t, koji će biti paralelan s ravninom σ (—2, 1, 2), a sjeći će pravac p (p ide točkom 7, 0·5, 4, $\sphericalangle p'x = 60^0$, $\sphericalangle p''x = 45^0$).

139.) Zadane su obje projekcije p' i p'' pravca p; odredi njegovo probodište s ravninom ρ (∞, 3, 4).

140.) Ako je za neki pravac $q' \parallel q''$, zašto je taj pravac q paralelan s ravninom istovetnosti? Isp. zadatak 132.

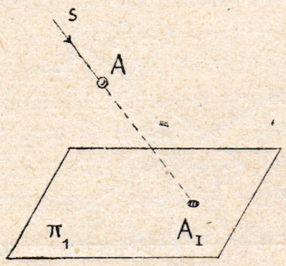
141.) Nacrtaj projekcije pravca t, koji je paralelan s ravninom sumjerenosti. Obje će projekcije biti jednako priklonjene prema osi x. (Probodište toga pravca s pomenutom ravninom nije u konačnosti). Upotrebi $\Pi_3 \perp x$.

II. Konstrukcije o sjenama.

44. Općene pripomene o sjenama za paralelnu rasvjetu. Iz kojegagod izvora svjetlosti izlaze pravocrtne zrake. Ako je izvor veoma dalek, uzimamo, da su sve zrake svjetlosti paralelne (na pr. približno kod sunčane svjetlosti). Ako je izvor bliza točka, ne će zrake biti paralelne, rasvjeta je centralna (umjetna rasvjeta).

*

Upadne li neka zraka svjetlosti u neku točku A predmeta (slika 117.), ne će ona moći proći kroz predmet, već će biti zaustavljena točkom A. Da je zraka mogla kroz A slobodno prodrijeti dalje, sjekla bi ona neku ravninu Π_1 u točki A_I; ta bi točka bila u tome slučaju svijetla točka. No kako je zraka zaustavljena točkom A, bit će na mjestu A_I tamna točka, koju nazivamo bačenom sjenom točke A. Konstruirati sjenu neke tvorevine znači odrediti onaj lik na nekoj ravnini Π_1, koji je sastavljen od bačenih sjena svih točaka (pravaca ili pobočaka) tvorevine za neku zadanu rasvjetu.



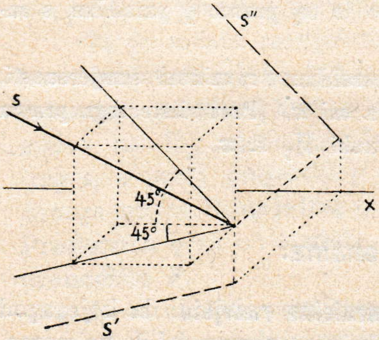
Sl. 117.

Kontura je sjene međa između tamnoga i svijetloga dijela osnovne ravnine.

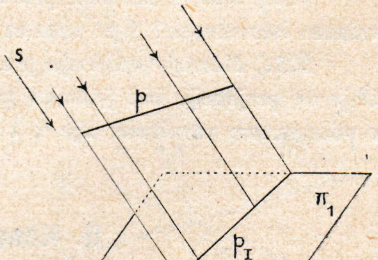
Kaže se, da neko tijelo baca sjenu na ravninu (Π_1); ta se sjena zove zato i bačena sjena za razliku od samosjene, koja se javlja na samome tijelu u prostoru. Onaj dio tijela, koji je okrenut prema smjeru svjetlosti, bit će osvijetljen, ostali će pak dio tijela biti u tami; taj je drugi dio samosjena tijela.

Ovdje ćemo se baviti uglavnom samo paralelnom rasvjetom.

1. Sjena neke točke A prostora (sl. 117.) odredit će se geometrijski tako, da se točkom A položi zraka svjetlosti s, pa da se na ravnini Π_1 ili Π_2 (ili na kojoj drugoj zadanoj ravnini) odredi njezino probodište A_I (ili A_{II}, ili A_*). Prva i druga projekcija s' i s'' zrake mogu se izabrati po volji, no često se uzima, da obje projekcije zatvaraju s x kut od 45^0 tako, da zraka s u prostoru ima smjer dijagonale kocke, kojoj je jedna pobočka paralelna s Π_1, druga s Π_2 (slika 118.).



Sl. 118.



Sl. 119.

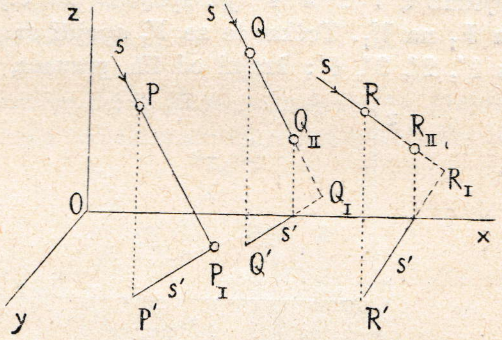
2. Sjena nekoga pravca p (slika 119.) dobit će se tako, da se svakom točkom pravca zamisli položena zraka svjetlosti (dosta je, da se to zbilja

učini za dvije točke), pa da se potraže probodišta svih tih zraka s nekom osnovnom ravninom, na pr. s Π_1, na koju će padati sjena. Sve će te zrake biti u istoj ravnini, koja ide pravcem p te je paralelna sa smjerom zrakâ s (§ **4.**, *1*). Ta se ravnina zove ravnina svjetlosti; njezin je trag na Π_1 sjena p_I pravca p. Budući da su ravnocrtni likovi sastavljeni od točaka i pravaca, moći ćemo s pomoću pojedinih zraka i ravninama svjetlosti odrediti sjenu svakoga ravnocrtnoga lika.

3. Ako se određuje sjena na neku ravninu Π_1 za točku H, koja je u toj ravnini Π_1, bit će sjena H_I u istoj točki H.

4. Određuje li se sjena predmeta s obzirom na dvije ravnine, na pr. na ravnine projekcijâ Π_1 i Π_2, može nastati slučaj, da cijela sjena pada na jednu od tih ravnina ili da pada dijelom na jednu, dijelom na drugu ravninu; u posljednjem se slučaju sjena lomi na osi x.

5. Sjena neke točke P može pasti ili na Π_1 u P_I ili na Π_2 u P_{II}; samo jedna od tih sjena može biti prava sjena. Sjena P_I bit će prava sjena onda, ako zraka svjetlosti, koja ide kroz P, siječe prije Π_1 nego Π_2. U slici 120. sjena je P_I prava sjena točke P. Isto je tako Q_{II} prava sjena točke Q, jer s siječe prije Π_2, a onda istom Π_1 iza ravnine Π_2. Takova se sjena Q_I, koja bi bila prava sjena točke Q, da nema ravnine Π_2, ipak često treba za dalje geometrijske konstrukcije o sjenama. Za točku R imamo opet pravu sjenu u R_{II}. U sl. 120. određena je zraka svagdje kosom projekcijom s i prvom projekcijom s'.



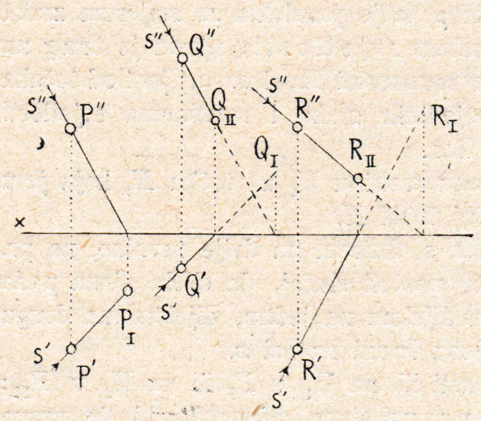
Sl. 120.

Da li sjena neke točke pada najprije na Π_1 ili najprije na Π_2, to zavisi o položaju točke prema Π_1 i Π_2 te o smjeru zrake svjetlosti. U sl. 120. imaju zrake s za P i Q isti smjer, pa ipak pada prava sjena za P u Π_1, a prava sjena za Q u Π_2. To izlazi odatle, što je točka Q bliža ravnini Π_2. Točka R, koja ima u prostoru posve isti položaj kao i točka P, ima ipak pravu sjenu u Π_2, jer je zraka s za R manje nagnuta prema Π_2 negoli zraka za P.

Za istu sliku moraju sve zrake svjetlosti imati isti smjer („paralelna sjena“).

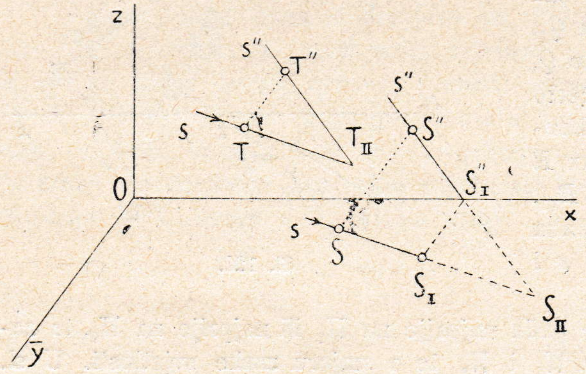
Odnosi, prikazani u kosoj projekciji u sl. 120., predočeni su u obje normalne projekcije u slici 121. Tu su sjene određene onako, kako se određuju probodišta pravca s Π_1 i Π_2 (isp. § **35.**).

U slici 122. prikazana je zraka svjetlosti kosom projekcijom s i drugom normalnom projekcijom s''. Točka T ima pravu sjenu u T_{II}, a točka S u S_I. Zraka s, koja ima za S isti smjer kao i za T, siječe najprije Π_1 u S_I, a onda istom Π_2 ispod Π_1 u S_{II}. Kod toga treba imati na umu, da je $S_I S''_I$ ordinala točke S_I, koja je u prostoru normalna na osi x; u kosoj će projekciji ta ordinala biti paralelna sa smjerom y.



Sl. 121.

6. Sjena piramide, kojoj je osnovka 1 2 3 4 u Π_1 (slika 123.), a vrh joj je V, bit će sastavljena od sjene osnovke i od sjene vrha. Osnovka ima svoju sjenu na Π_1 ujedno u $1' 2' 3' 4'$ (gl. sprijeda pod *3*.). Sjena vrha V pada u slici 123. a u V_I na Π_1. Točka će se V_I spojiti sa sjenama vrhova na osnovci, dakle s $1'$, $2'$, $3'$, $4'$; krajni od tih pravaca, t. j. $V_I 2'$ i $V_I 4'$ omeđuju sjenu piramide. Ta su dva pravca sjene bridova $V2$ i $V4$. Takvi se bridovi zovu rastavnice. Dio piramide V 4 1 2 V okrenut je prema svjetlosti; dio V 2 3 4 V bit će u tami (samosjena). Konturu bačene sjene čine sjene rastavnicâ i bridovi osnovke.



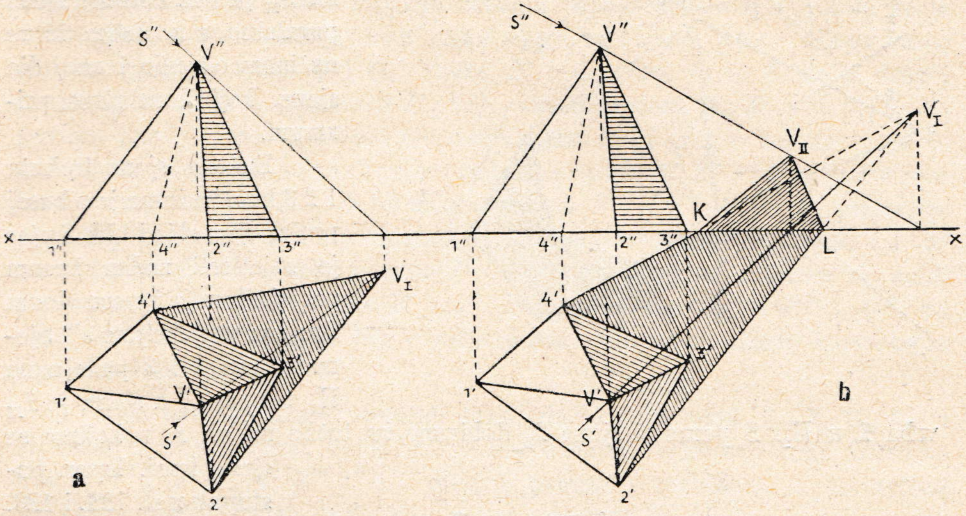
Sl. 122.

U sl. 123. b zadan je smjer svjetlosti tako, da prava sjena vrha V pada u V_{II} na Π_2. Da nema ravnine Π_2, bila bi sjena vrha u V_I na Π_1, a sjena bi piramide bila omeđena pravcima $V_I 2'$ i $V_I 4'$. No poradi ravnine Π_2 ne će sjena u Π_1 dopirati dalje nego do prušca KL na x. U tim se točkama sjena lomi pa prelazi od K i L do V_{II}.

Sjena brida $V2$ bit će dakle u desnoj slici: $2' \, L V_{II}$; pravci $2' \, L$ i $V_{II} L$ nijesu drugo nego tragovi ravnine svjetlosti, koja je položena bridom $V2$.

7. Sjena pravca p, koji je s nekom ravninom (na pr. Π_1) paralelan, bit će na toj ravnini pravac $p_I \parallel p$. Zašto?

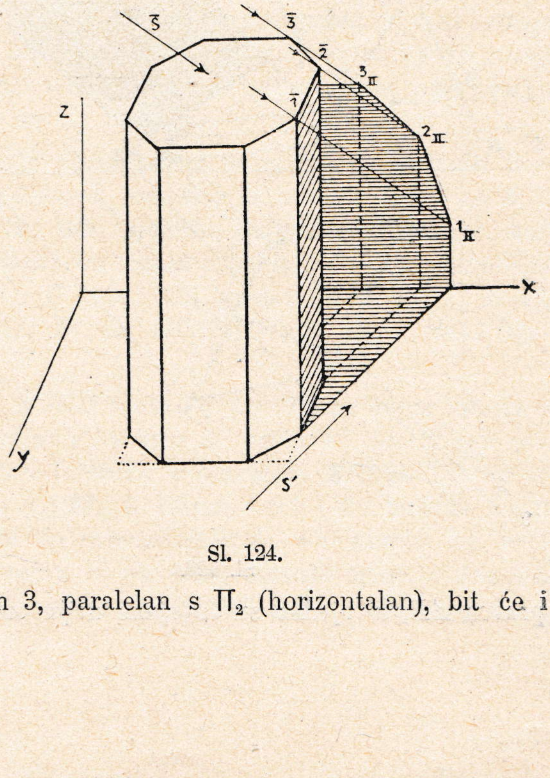
45. Sjena tijela i ravnoga lika. U slici 124. prikazan je vidljiv dio sjene uspravnoga stupa (prizme) u kosoj projekciji. Na kvadratskoj su osnovci



Sl. 123.

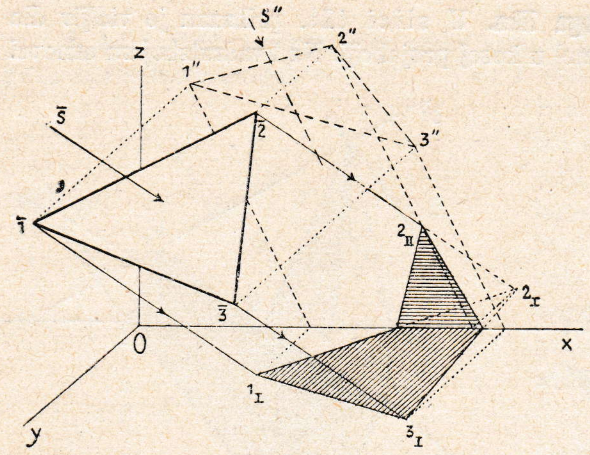
od vrhova odmjerene četvrtine osnovnoga brida, pa su, tako dobivene, krajne točke spojene; tim je načinom osnovka postala nepravilan osmerokut. Zraka je svjetlosti zadana kosom projekcijom $\bar{s}$ i prvom normalnom projekcijom s'.

Da nema ravnine *xz* (ili Π_2), polazila bi sjena od donje osnovke pa bi se završila sjenom gornjega osmerokuta na Π_1. Konturu će sjene u Π_1 činiti bačena sjena brida, koji ide vrhom 1; ta će kontura biti paralelna sa s'. Sjena će se brida 1 lomiti na osi *x* pa će odavle ići vertikalno do 1_{II} (isp. § **44.**, *7*).



Sl. 124.

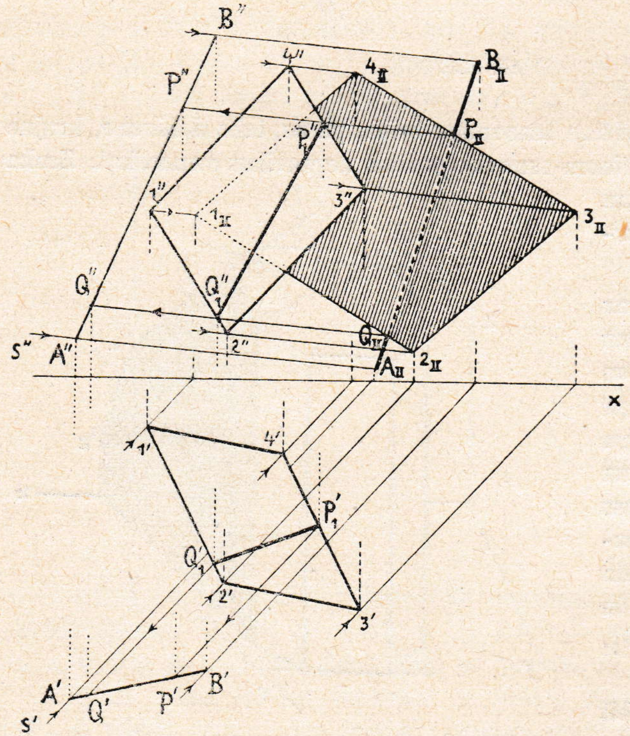
Sjena vrhova 2 i 3 bit će u Π_2 točke 2_{II} i 3_{II}. Budući da je stražnji brid gornje osnovke, koji ide vrhom 3, paralelan s Π_2 (horizontalan), bit će i



Sl. 125.

njegova sjena na Π_2 s njim paralelna; točkom ćemo dakle 3_{II} povući konturu sjene paralelno s x. Istim bi se načinom odredio i onaj dio sjene, koji je zakriven prizmom.

Bačena sjena trokuta 1 2 3 konstruirana je u kosoj projekciji u slici 125. Smjer je svjetlosti zadan kosom projekcijom s i normalnom drugom projekcijom s''. Sjene vrhova 1 i 3 padaju na Π_1 u 1_I i 3_I, a sjena je 2_{II} vrha 2 u Π_2. S pomoću sjene 2_I dobivene su točke na osi x, u kojima se sjena lomi. Ispor. postupak u sl. 122. i 123.



Sl. 126.

46. Sjena jednoga ravnoga lika na drugi. Ako je zadan koji ravni lik, na pr. paralelogram, a izvan njega pravac, onda se može govoriti o bačenoj sjeni pravca na paralelogram. U slici 126. zadan je paralelogram $1'\,2'\,3'\,4'$, $1''\,2''\,3''\,4''$ i pravac (ili pružac) $A'B'$, $A''B''$. Za smjer zrakâ svjetlosti s', s'' padaju sjene zadanih tvorevina u $1_{II}\,2_{II}\,3_{II}\,4_{II}$, te $A_{II}\,B_{II}$. Točke P_{II} i Q_{II}, u kojima sjena $A_{II}\,B_{II}$ pravca siječe konturu sjene $1_{II}2_{II}3_{II}4_{II}$, jesu sjene dviju točaka P i Q pravca AB, a ujedno su to sjene dviju točaka P_1 i Q_1, koje su na stra-

nicama 3 4 i 1 2 paralelograma. Točke P i P_1 imaju dakle zajedničku sjenu P_{II}, a točke Q i Q_1 zajedničku sjenu Q_{II} na Π_2. Zraka svjetlosti, koja ide točkom P, siječe najprije ravninu paralelograma u P_1; zato se ta točka može shvaćati kao sjena točke P na ravninu paralelograma; isto to vrijedi za točke Q i Q_1. Točke P_1 i Q_1 dobit će se dakle u drugoj projekciji tako, da se sjecištima P_{II} i Q_{II} obadviju sjenâ $A_{II} B_{II}$ i $1_{II} 2_{II} 3_{II} 4_{II}$ povuku paralele sa s'' i odrede one dvije točke P''_1 i Q''_1, u kojima te paralele sijeku istoimene stranice paralelograma $1''2''3''4''$; produžimo li te paralele do $A''B''$, dobit ćemo sjecišta P'' i Q''. Prve će projekcije P'_1 i Q'_1 tih točaka biti u ordinalama na pripadnim stranicama $3'4'$ i $1'2'$ paralelograma. Povučemo li kroz P'_1 i Q'_1 paralele sa smjerom s', dobit ćemo na $A'B'$ dvije točke P' i Q'. Prije dobivene točke P'' i Q'', pa obje točke P' Q', moraju biti u ordinalama; tim se postizava kontrola za ispravno crtanje.

Cijela se slika može shvaćati tako, da je četverokut $1_{II} 2_{II} 3_{II} 4_{II}$ u Π_2 osnovka kose prizme, kojoj bridovi imaju smjer zrakâ svjetlosti. Četverokut je $1'2'3'4'$, $1''2''3''4''$ presjek prizme s ravninom, a četverokut $P_{II} Q_{II} Q''_1, P''_1$ druga projekcija onoga presjeka te prizme, koji je u ravnini, položenoj pravcem $A_{II} B_{II}$ (ili AB) paralelno sa zrakama svjetlosti; ravnina je pomenutoga četverokuta „ravnina svjetlosti“.

Ima li se naći bačena sjena jednoga ravnocrtnoga lika na drugi, postupat će se istim načinom za pojedine stranice prvoga lika ponovo onako, kako se odredila bačena sjena pravca AB na paralelogram. Ako se bačena sjena jednoga ili drugoga lika bude lomila na osi x, provest će se gornji postupak bez obzira na to, samo treba paziti, da bačene sjene obadvaju likova budu određene posebno na Π_1 i na Π_2.

U pređašnjoj je konstrukciji upotrebljena bačena sjena zadanih tvorevina na ravninu Π_2 (a isti postupak vrijedi i za bačenu sjenu na Π_1), no konstrukcija se može izvesti i bez upotrebe bačene sjene, na pr. kad nije poznata os x; u tome slučaju ne možemo naime odrediti probodišta za zrake svjetlosti s Π_2 ili s Π_1. U slici 127. zadan je trokut $1'2'3'$, $1''2''3''$ i paralelogram $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, pa smjer zraka svjetlosti sa s', s''.

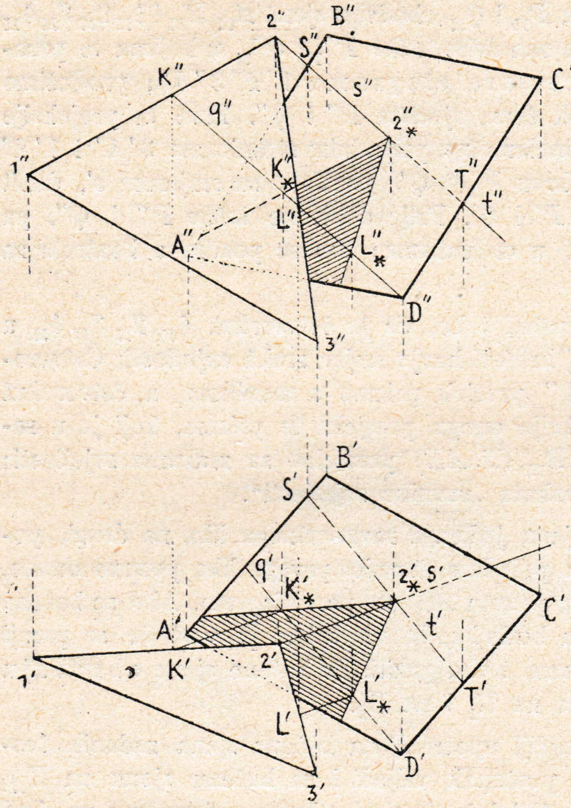
Sjena vrha 2 na ravninu $ABCD$ može se naći tako, da se vrhom 2 položi zraka s, dakle kroz $2'$ smjer s', a kroz $2''$ smjer s'', pa da se s pomoću pravca t odredi probodište te zrake s ravninom $ABCD$. To će se učiniti načinom, koji je prikazan u § **37.**, 3. Stranice 2 1 i 2 3 trokuta bacat će sjene jednim svojim dijelom na ravninu $ABCD$. Na stranici 2 1 uzet ćemo neku točku K, a na 2 3 točku L, pa ćemo odrediti sjenu prušca KL na ravninu paralelograma. U slici su projekcije K'' i L'' uzete na $q'' \parallel s''$,

t. j. $q'' \parallel t''$, gdje je pravac $q \parallel t$ u ravnini $ABCD$, a ide točkom D. U pravac q'' padaju 2. projekcije zrakâ svjetlosti, koje idu kroz K i L.

U prvoj će projekciji biti $q' \parallel t'$ kroz D', a sjene će točaka K i L biti $K'_* K''_*$, $L'_* L''_*$, gdje je $K' K'_* \parallel s'$ i $L' L'_* \parallel s'$. Pravci $2'_* K'_*$, $2''_* K''_*$; $2'_* L'_*$, $2''_* L''_*$, produženi do konture paralelograma, omeđuju onaj dio sjene trokuta, koji pada na paralelogram.

47. Sjene uz centralnu rasvjetu. Ako je izvor svjetlosti konačna neka točka I, pa treba odrediti sjenu točke A na Π_1, spojit će se I s A, t. j. povući će se ona zraka svjetlosti, koja prolazi točkom A, pa će se na Π_1 odrediti probodište te zrake (gl. § **44.**, *1*).

Sjena nekoga pravca p na Π_1 dobit će se kao trag p_I one ravnine, koja je položena izvorom I i pravcem p; to je ravnina svjetlosti za pravac p. Sve konstrukcije o sjenama bit će inače jednake konstrukcijama za paralelnu rasvjetu.



Sl. 127.

Zadaci za vježbu.

142.) Odredi sjenu točke P $(-1, 3, 4)$ na ravninu ρ $(-0{\cdot}5, 2, 3)$ uz paralelnu rasvjetu $\sphericalangle s\, x = \sphericalangle s''\, x = 45^0$, a onda uz centralnu rasvjetu I $(-2, 4, 5)$.

143.) Konstruiraj sjenu trokuta MNP, $M(2, 1, 1)$ $N(4, 3, 4)$ $P(6, 1, 2)$ na Π_1, Π_2 i na ravninu τ $(5, 2, 6)$ uz paralelnu rasvjetu, koja ima smjer od desna odozgo prema dolje na lijevo tako, da i sjena točke P padne na ravninu τ.

144.) Odredi sjenu kvadrata, koji ima stranicu $a = 3$, središte mu je točka S $(4, 4, 5)$, a ravnina mu je paralelna s Π_1; zrake svjetlosti položi tako, da sjena padne dijelom na Π_1, dijelom na Π_2.

145.) Prikaži sjenu kvadrata u zadatku 144. u kosoj projekciji.

146.) Mogu li sjene dvaju mimosmjernih pravaca a i b na ravninu Π_1 biti paralelne uz centralnu rasvjetu? Isp. § **4.**, *8.*; tamo je ravnina α ono, što je ovdje Π_1!

147.) Predoči za obadva slučaja *a)* i *b)* u sl. 123. sjene piramide, i to u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{3}$).

148.) Prikaži sjenu prizme u sl. 124. u normalnim projekcijama $\sphericalangle s''x = \sphericalangle s'x = 45^0$. Koliki je kut, što ga čini s s Π_1 i s Π_2.

149.) Predoči sjenu trokuta u sl. 125. u normalnim projekcijama uz centralnu rasvjetu I (—3, 4, 5).

150.) Predoči sl. 126. i 127. u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$; *pr.* $\frac{1}{2}$).

151.) Odredi u normalnim projekcijama sjenu trokuta A (1, 3, 0) B (4, 4, 0) C (3, 0, 5) za paralelnu rasvjetu.

152.) Odredi zajedničku točku za sjene dvaju mimosmjernih pravaca a i b na Π_1, a onda na Π_2, ako je rasvjeta centralna. Isp. zadatak 131.

153.) U pobočnoj ravnini Π_3 zadan je pred Π_2 kvadrat, kojemu su dvije stranice paralelne s osi y; odredi smjer za zrake svjetlosti tako, da sjena središta toga kvadrata padne u os x, i prikaži dio sjene na Π_1.

154.) U ravnini Π_1 položen je pravokutnik (2 stranice paralelne s osi x); odredi sjenu pravokutnika na Π_2 uz centralnu rasvjetu I (—2, 4, 5) tako, da sjene svih vrhova budu blize konačne točke.

155.) Odredi sjenu prušca A (—2, 4, 5) B (—2, 2, 3) na ravninu ρ (—3, 1, 5) načinom, koji je upotrebljen u sl. 126.

156. Nađi sjenu za težište trokuta A (0, 5, 3) B (0, 4, 5), C (0, 1, 1) uz paralelnu rasvjetu. Sjena težišta bit će na Π_1 težište sjene na tu ravninu (§ **24.**, 6).

157.) Sjena točke A (—5, 6, 2) pada na Π_1 u A_I (—1, 4, 0). Odredi sjenu točke na Π_2.

158.) Prikaži sjenu kocke u kosoj projekciji, ako su tri njezine pobočke paralelne redom s xy, xz, yz ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$); rasvjeta je paralelna.

159.) Odredi sjenu prušca AB u zad. 155. na ravninu istovetnosti uz paralelnu rasvjetu $\sphericalangle s'x = \sphericalangle s''x = 45^0$.

160. Za trokut u zad. 151. položi novu pobočnu ravninu $\Pi_3 \perp \Pi_1$ i odredi na tu ravninu sjenu trokuta uz centralnu rasvjetu I (—2, 4, 5).

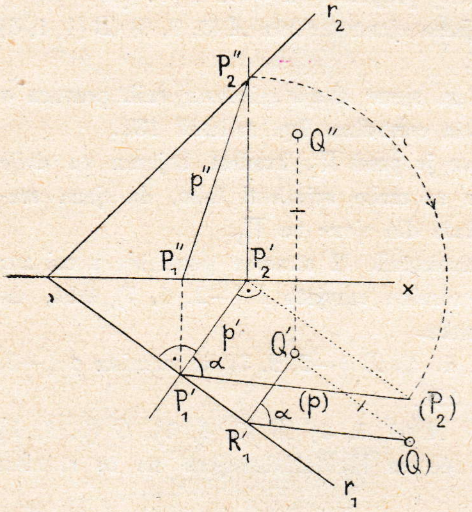
III. Pravci i ravnine u okomitu položaju. Prikloni kutovi.

48. Priklonica i prikloni kut ravnine. Pravac ravnine ρ, koji je normalan na prvom ili na drugom tragu ravnine, zove se priklonica prvoga ili drugoga traga ili priklonica prve ili druge skupine. U slici 128. prikazana je priklonica p', p'' prvoga traga ravnine r_1, r_2; tu je $p' \perp r_1$

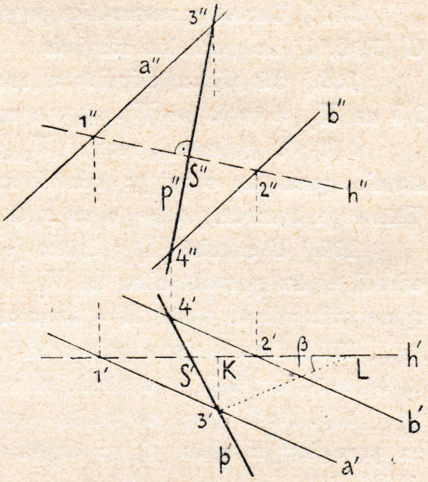
(gl. § **6.**, *4* i § **13.**), a p'' izlazi s pomoću P''_1 i P''_2. Preloži li se priklonica p oko p' u Π_1, dobit će se $(p) \equiv P'_1 (P_2)$. Preložaj (p) zatvara s projekcijom p' p r i k l o n i k u t α ravnine $\rho \equiv r_1, r_2$ s Π_1 (§ **6.**, *4*).

Istim se načinom određuje priklonica q drugoga traga (gdje će biti $q'' \perp r_2$) i prikloni kut β ravnine ρ prema Π_2.

Neka točka Q ravnine ρ može se predočiti tako, da se izabere Q', tom točkom povuče priklonica prvoga traga i nacrta preložaj $Q' R'_1$ (Q), i to tako, da je kut, što ga čine $Q' R'_1$ i preložaj $(Q) R'_1$, jednak priklonu α,



Sl. 128.



Sl. 129.

pa da je $(Q) Q' \perp Q' R'_1$. Visina točke Q nad Π_1 bit će jednaka kateti $(Q) Q$, koja se prenosi na ordinalu točke Q' od x do Q''. To se određenje može kontrolirati sutražnicom za Q', Q'''.

Priklonica jedne ili druge skupine može se lako predočiti u projekcijama i onda, ako ravnina nije zadana tragovima, nego na pr. paralelnim pravcima a i b kao u s l i c i 129. Treba li odrediti priklonicu druge skupine, odredit će se najprije sutražnica druge skupine. Izabere li se gdjegod h' normalno na smjer ordinala, a onda nađe h'' s pomoću sjecišta $1'$, $2'$, imat će h'' isti smjer, kao i drugi trag zadane ravnine $[a\, b]$. Povuče li se dalje gdjegod $p'' \perp h''$, bit će p'' druga projekcija tražene priklonice; prva se projekcija p' dobiva s pomoću sjecišta $3''$ i $4''$. Oba se pravca p i h sijeku u točki S. Prava dužina prušca $S3$ na priklonici dobiva se poznatim načinom tako (gl. § **20.**), da se prenese $KL = S'' 3''$ na h'; prava je dužina $3' L$, a prikloni je kut β zadane ravnine prema Π_2 jednak kutu $KL 3'$.

Zadaci za vježbu.

161.) Zadana je ravnina σ (4, 3, 4) i projekcija Q'' (1·5, ?, 1·5) jedne njezine točke. Položi tom točkom obje priklonice (1. i 2. skupine) i odredi prikloni kut β ravnine σ.

162.) Zadan je prvi trag r_1 ravnine ρ i priklon $\alpha = 30^0$; odredi drugi trag r_2.

163.) Zadan je trag r_2 ravnine ρ i projekcija Q'' točke Q. Kolika je daljina QQ'', ako ravnina ρ ima 2. priklon $\beta = 30^0$? Odredi trag r_1.

164.) Zadana je ravnina σ (—3, 4, 5); odredi ravninu τ, koja ide tragom s_2, te raspolavlja prikloni kut ($\sigma\,\Pi_2$). Preloži priklonicu u ravninu Π_2!

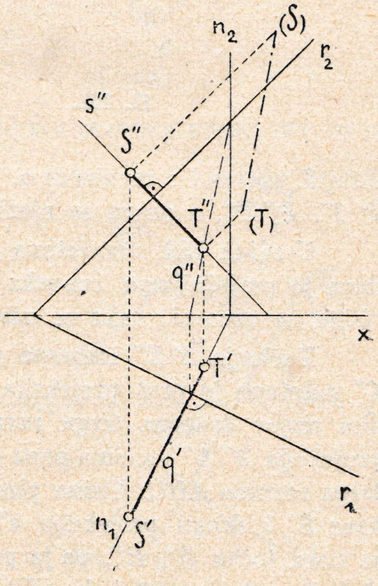
165.) U ravnini Π_1 zadan je trokut ABC. Odredi vrh V piramide, kojoj je ABC osnovka tako, da pobočke VAB, VAC i VBC čine s Π_1 kutove 45^0, 30^0, i 60.

166.) Nacrtaj projekcije prizme, kojoj je osnovka zadani romboid u Π_2; dvije suprotne pobočke prizme neka čine s Π_2 priklon 45^0, dvije druge pobočke priklon 60^0. Visina prizme neka bude tolika, kolika je veća dijagonala osnovke.

167.) Točkom P ravnine ρ, koja s Π_1 čini priklon 60^0, povuci pravac p, koji će imati prvi priklon 45^0 (isp. § **14.**, sl. 45.).

168.) Obadva priklona kuta neke ravnine ρ s Π_1 i Π_2 čine zbroj $\alpha + \beta$, gdje je $180^0 \geq (\alpha + \beta) \geq 90^0$. Kad je ravnina $\rho \,\|\, x$, bit će $\alpha + \beta = 90^0$. Zašto? Kad je $\rho \perp x$, bit će $\alpha + \beta = 180$. Zašto?

Točka, u kojoj se sastaju oba traga r_1 i r_2, neka bude K. Trobrid K (r_1, r_2, x) ima tri plošna kuta, koji su α, β, 90^0. Kako je u trobridu $\alpha + \beta + 90^0 > 180^0$, bit će uopće $\alpha + \beta > 90^0$. Kako se pak pod priklonim kutovima α i β razumiju šiljasti kutovi, mora biti uopće $\alpha + \beta < 180^0$.

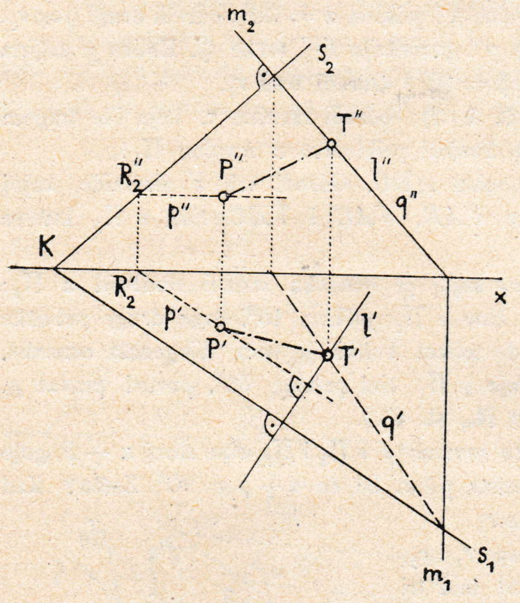


Sl. 130.

49. Pravci i ravnine, što su među sobom normalni (okomiti). Za pravac s, koji je normalan na ravnini ρ (slika 130.), bit će projekcije $s' \perp r_1$, $s'' \perp r_2$. Ravnina će naime ν, koja projicira s u s' na Π_1, biti normalna na ρ (jer ide normalom s te ravnine), i ujedno na Π_1. Zato će biti ν ravnina normalna na presječnici ($\rho\,\Pi_1) \equiv r_1$, dakle njezin trag $n_1 \equiv s' \perp r_1$. Slično se tako pokazuje, da je $s'' \perp r_2$. Ako je T probodište ravnine ρ s normalom s, bit će s okomit pravac na sutražnici i na priklonici točke T (§ **5.**, *2*).

Ima li se iz neke točke S prostora spustiti normala s na zadanu ravninu ρ, povući će se kroz S' pravac $s' \perp r_1$, a kroz S'' pravac $s'' \perp r_2$. Ako je T probodište normale s s ravninom ρ, bit će ST daljina točke S od ravnine ρ. U slici 130. određena je prava veličina te daljine u prušcu $\overline{(S)(T)}$.

Obrnuta zadaća: Točkom P položiti ravninu σ okomito na zadani pravac l, razriješena je u slici 131. Ravnina se σ mora tako odrediti, da bude trag $s_1 \perp l'$, $s_2 \perp l''$, pa da točka P bude u ravnini σ. Sutražnica prve skupine, koja ide točkom P, imat će prvu projekciju $p' \perp l'$ kroz P', a druga će projekcija biti $p'' \parallel x$ kroz P''. Drugo je probodište sutražnice p točka R''_2, kojom ide $s_2 \perp l''$; sjecištem $K \equiv (s_2 x)$ ide $s_1 \perp l'$. Tim je ujedno riješena i ta zadaća, da se nađe daljina točke P od pravca l. Položit će se kroz P ravnina $\sigma \perp l$, kako je izvedeno u sl. 131., a onda će se poznatim načinom (§ **43.**) odrediti probodište T pravca l s ravninom σ. Tražena je udaljenost prikazana projekcijama $P'T'$, $P''T''$, a prava se njezina veličina može naći preloženjem.

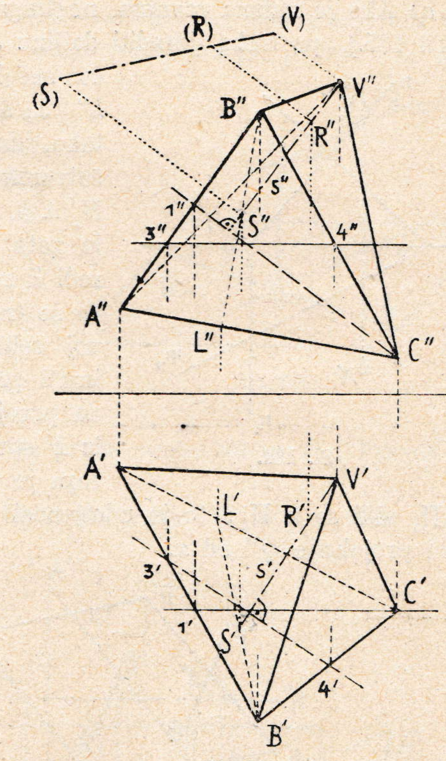


Sl. 131.

U slici 132. razriješena je još ova zadaća: Od piramide $ABCV$ zadana je projekcijama osnovka ABC, prava veličina visine VS i nožište S visine na osnovci; neka se odrede projekcije vrha V.

Točka je $S'\,S''$ izabrana na pravcu $B'L'$, $B''L''$ osnovke ABC. Kroz C' položena je prva projekcija sutražnice $1'\,C' \parallel x$; druga projekcija $1''\,C''$ ima smjer drugoga traga ravnine ABC. Sutražnica pak, kojoj je druga projekcija $3''\,4'' \parallel x$, ima prvu projekciju $3'\,4'$, koja naznačuje smjer prvoga traga ravnine ABC. Visina piramide imat će dakle prvu projekciju $s' \perp 3'\,4'$ kroz S' i drugu projekciju $s'' \perp 1''\,C''$ kroz S''. Na visini s', s'' izabrana je neka točka R', R'', pa je pružac SR preložen oko $S'\,R''$ u $(S)(R)$. Produži li se taj preložaj do (V) tako, da bude $(S)(V)$ prava veličina zadane visine, dobit će se V'' s pomoću normale $(V)V''$ iz (V) na s'', a prva je projekcija V' u ordinalu na s'.

50. Normalne ravnine. Svaka ravnina μ, položena okomicom p zadane ravnine ρ, bit će normalna na ρ (isp. § **7.**, *1*). Treba li dakle odrediti tragove m_1, m_2 takve ravnine μ, koja je okomita na ρ (slika 133.), položit će se kojagod normala $p' \perp r_1$, $p'' \perp r_2$ ravnine ρ, odrediti probodišta P'_1 i P''_2 normale p', p'' s Π_1 i Π_2, a onda tim probodištima povući tragovi m_1 i m_2, koji se sijeku na osi x. Kad se izabrao jedan trag (na pr. m_1 kroz P'_1), onda je drugi trag m_2 već određen.

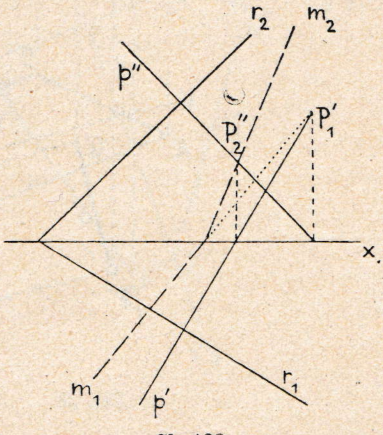


Sl. 132.

Pravcem p položit će se na zadanu ravninu μ, gdje p nije normalan na μ, normalna ravnina ν tako, da se iz dvije točke pravca p spuste normale na μ, i onda tim dvjema paralelnim pravcima položi ravnina ν. Ravnine će se μ i ν sjeći u pravcu p_1, koji je normalna projekcija za p na μ. Kut pravaca p i p_1 bit će prikloni kut pravca p prema ravnini μ.

Da se odredi ravnina σ, koja je normalna na dvije zadane ravnine μ i ν, naći će se najprije presječnica q ravninâ μ i ν, a onda istumačenim načinom (§ **49.**) položiti ravnina $\sigma \perp q$.

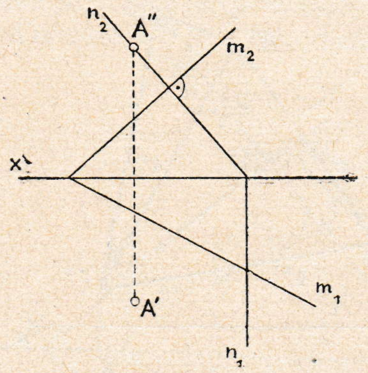
U konstrukcijama treba često točkom položiti ravninu normalno na neku zadanu ravninu i na koju ravninu projekcija. U slici 134. položena je točkom A', A'' ravnina ν okomito na $\mu \equiv m_1, m_2$ i na Π_2, dakle na trag m_2. Projekcijom A'' položen je drugi trag n_2 ravnine ν okomito na m_2, a sjecištem $(n_2 x)$ trag n_1 normalno na os x (isp. **7.**, *7*).



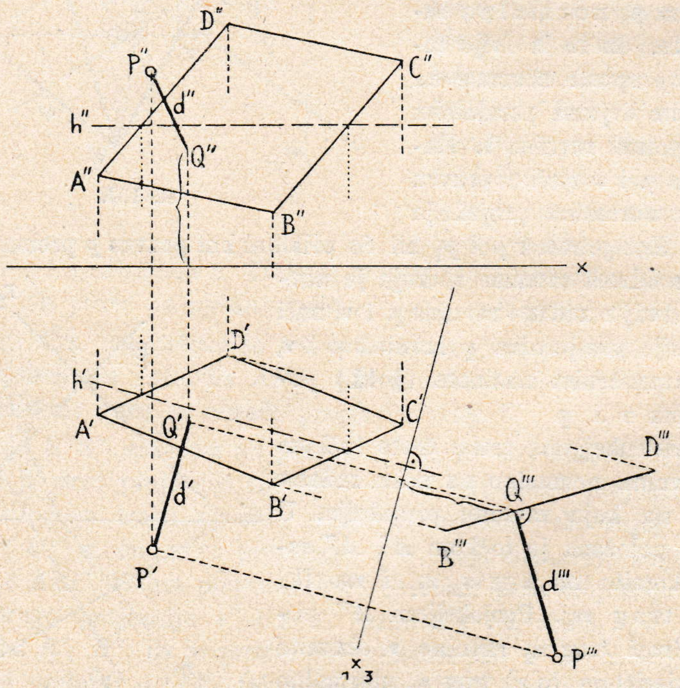
Sl. 133.

51. Upotreba 3. projekcije za određenje udaljenosti. Zadaće o normalnim pravcima, ravninama, o udaljenostima i t. d. mogu se razriješiti i s pomoću treće projekcije (gl. na pr. sl. 114.).

a) Ako je zadana ravnina, ne tragovima nego četverokutovima $ABCD$ (slika 135.), pa treba odrediti daljinu d točke P od te ravnine, upotrebit će se kojagod sutražnica prve skupine, $h'' \parallel x$, h'; položit će se nova ravnina Π_3 tako, da bude $_1x_3 \perp h'$. Treća projekcija četverokuta $ABCD$ bit će pružac, jer je $\Pi_3 \perp h$, a h je pravac ravnine $ABCD$, pa je zato $\Pi_3 \perp ABCD$ (isp. § **7.**, *1*). Odredi li se i treća projekcija točke P, vidjet će se tražena daljina $d''' \equiv P''' Q'''$ u pravoj veličini, jer je $d''' \parallel \Pi_3$. Točka će Q imati prvu projekciju na $P' Q' \perp h$, t. j. na prvoj projekciji normale, koja se može iz P spustiti na ravninu četverokuta; poradi toga je u crtnji $P' Q' \parallel {_1x_3}$. Visina točke Q nad Π_1 vidi se u Π_3; to je udaljenost točke Q''' od $_1x_3$, koja je jednaka daljini projekcije Q'' od x.



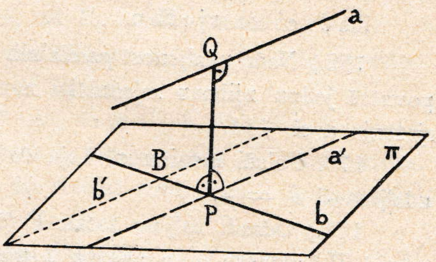
Sl. 134.



Sl. 135.

b) Pod najkraćom udaljenošću dvaju mimosmjernih pravaca a i b razumije se dužina prušca PQ, koji ima jedan kraj P na b, drugi

kraj Q na a, a stoji normalno na a i b (slika 136.) Uopće najkraća će se udaljenost dobiti tako, da se kojim od pravaca, na pr. pravcem b, položi ravnina $\Pi \parallel a$ ($b' \parallel a$ kroz B, $\Pi \equiv bb'$), pa da se pravac a projicira normalno na Π u a'. Pravci će se a' i b sjeći u krajnoj točki P najkraće udaljenosti. Uzdigne li se u P normala na Π, sjeći će ona a u drugoj krajnoj točki Q dužine PQ.

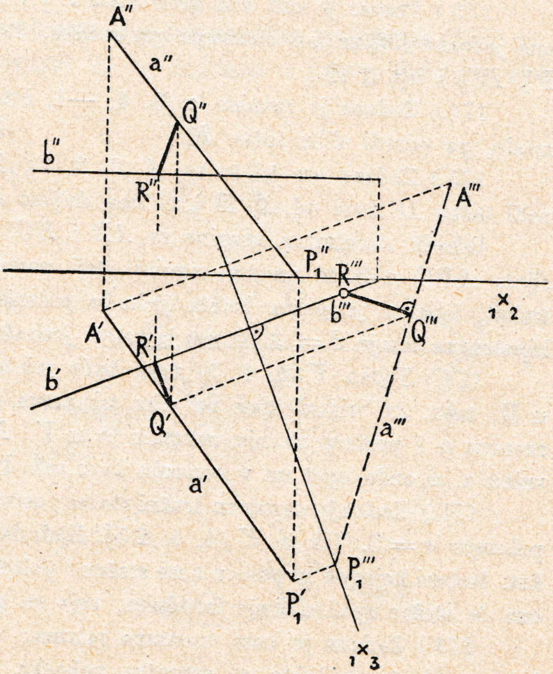


Sl. 136.

Ako je položaj pravca a ili b prema Π_1 ili Π_2 neki osobit, moći će se najkraća udaljenost odrediti jednostavnije. U slici 137. ima pravac a općen položaj; on je određen točkom A', A'' i prvim probodištem P'_1. Pravac je b paralelan s Π_1.

Položit ćemo treću ravninu $\Pi_3 \perp b'$, dakle $\Pi_3 \perp \Pi_1$; tako nastaje nova os ${}_1x_3$.

Pravac b projicirat će se na Π_3 u točku b''', gdje je daljina za b''' od ${}_1x_3$ jednaka visini pravca b'' nad Π_1; pravac će se pak a projicirati na Π_3 poznatim načinom u $a''' \equiv A''' P'''_1$. Normala iz b''' na a''' bit će najkraća udaljenost pravaca a i b. Projekcija je $R''' Q'''$ ujedno prava veličina najkraće udaljenosti, jer je $RQ \parallel \Pi_3$; vidi se naime, da je $a''' \perp R''' Q''' \perp b$. Ordinalom se dobiva projekcija Q'; druga krajna točka udaljenosti ima prvu projekciju R' na b', gdje je $R' Q' \parallel {}_1x_3$. Iz prve je projekcije ordinalama izvedena druga projekcija $R'' Q''$. Isp. za ovo rješenje i zadatak 171.



Sl. 137.

Ako su oba pravca a i b zadana u općenu položaju, može se transformacijom učiniti, da jedan bude paralelan s novom ravninom projekcija

Π_3 (isp. § **33.**); ponovnom transformacijom može se zadaća riješiti, kako je prikazano u sl. 137. (Razriješi napose zadatak 179.).

Z a d a c i z a v j e ž b u.

169.) Nađi udaljenost paralelnih ravninina ρ (3, 1, 2) i σ (4, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$) tako, da povučeš jednu njihovu zajedničku normalu i odrediš oba probodišta. Isp. drugo rješenje u sl. 114.

170. Položi ravninu σ, koja će biti paralelna s ravninom ρ (—2, 5, 3) u udaljenosti $d = 4$.

171.) Odredi daljinu točke P (5, 2, 3) od pravca $a \parallel \Pi_1$: visina je pravca a nad Π_1 jednaka 4, a priklon β toga pravca prema Π_2 čini 60^0.

Ako je jedan krak *(a)* pravoga kuta paralelan s Π_1, projicirat će se pravi kut na Π_1 opet u p r a v i kut. Sutražnica i priklonica prve skupine za kojugod ravninu čine takov pravi kut; njihove su projekcije opet kraci p r a v o g a kuta (isp. § **48.**).

172.) Položi ravninu ρ osu x normalno na ravninu σ (3, 3, 2).

173.) Pravac p ima oba probodišta P'_1 i P''_2. Nađi u osi x točku Q, koja ima jednake daljine od obadvaju probodišta. Položi ravninu simetrije za pružac P'_1 P''_2 i isp. § **19**.

174.) Zadana je ravnina τ (3, 4, —1) i točka P (2, 3, 3). Uzmi, da je τ zrcalo, pa odredi sliku točke P.

175.) Zadane su tri točke A (2, 3, 1), B (—1, 1, 4) i C (—4, 5, 2): nađi točku D, koja od A, B i C ima daljinu $d = 5$.

Odredi simetralne ravnine za AB i BC, nađi njihovu presječnicu s, koja siječe ABC u S te na toj ravnini stoji normalno. Sastavi napose pravokutan trokut, kojemu je jedna kateta jednaka pravoj veličini AS (ili BS, ili CS), a hipotenuza mu je $d = 5$. Druga je kateta jednaka daljini tražene točke D od ABC.

176.) Točka V (2, 2, 5) neka bude vrh trostrane piramide. Odredi osnovku u Π_1 tako, da bridovi čine na vrhu tri prava kuta. Točkom V položi kakvugod ravninu ρ i postavi na nju normalu n u V. Normalom n položi kakvugod ravninu ν, a onda opet na ν normalu kroz vrh V.

177.) Zadan je uspravan kružni stožac; osnovka mu je u Π_1, središte $S(5, 4, 0)$, polumjer $r = 3$. Vrh je V (5, 4, 2·5). Nađi dvije izvodnice stošca, koje čine pravi kut. Izaberi kojugod izvodnicu s na stošcu i položi na nju vrhom normalnu ravninu; ona će stožac sjeći u dvije izvodnice, koje su prema s pravokutno priklonjene.

178.) Zadana je kosa trostrana prizma; osnovka joj je u Π_2. Nađi daljinu jednog pobočnoga brida od suprotne pobočke.

179.) Odredi najkraću udaljenost mimosmjernih pravaca a i b, ako je a kakovgod pravac, a $b \perp \Pi_1$.

180.) Nađi daljinu točke P od ravnine ρ, koja je zadana s dva pravca a i b, i to transformacijom kao u § **51.**, *a*).

181.) Razriješi zadaću u sl. 132. transformacijom; $\Pi_3 \perp C'' 1''$.

182.) Razriješi zadaću u sl. 132. bez upotrebe osi x (isp. § **20.**).

183.) Odredi transformacijom dvije ravnine ρ i σ, koje imaju paralelne prve tragove, tako da bude $\rho \perp \sigma$. Tragovi r_3 i s_3 na $\Pi_3 \perp \Pi_1$ bit će normalni.

184.) Nađi daljinu točke Q (2, 3, 5) od ravnine σ (—2, 3, 1·5) transformacijom $\Pi_3 \perp s_2$.

185.) Zadani su mimosmjerni pravci a i b tako, da je $a' \parallel b'$. Odredi najkraću daljinu za a i b transformacijom ${}_1x_3 \equiv b'$. Treća projekcija udaljenosti $(a''' b''')$ bit će točka.

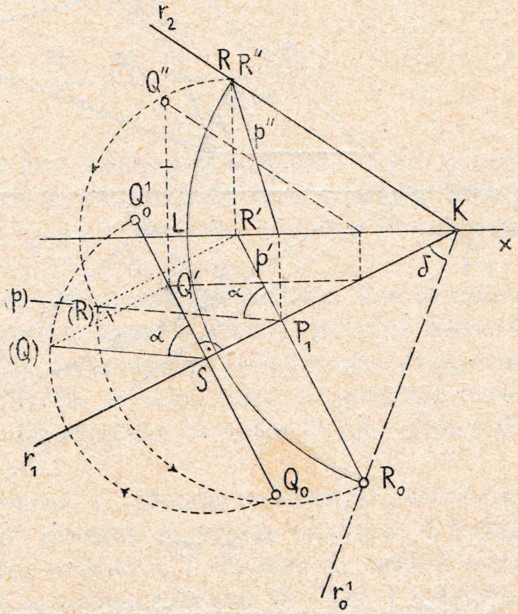
186.) Predoči pravac, koji je normalan na ravnini sumjerenosti ili na ravnini istovetnosti (upotrebi p o b o č n u ravninu Π_3).

187.) Zadana je ravnina ρ (—3, 4, 2), točka P (—2, 4, 5) i pravac A (0, 7, 8) P'_1 (—6, 3, 0). Povuci točkom P pravac $p \parallel \rho$, tako da p i zadani pravac AP'_1 budu pravokutno priklonjeni (mimosmjerni pravci). Položi kroz P ravnine $\sigma \parallel \rho$ i $\tau \perp p$! Isp. § **5.**, *6.*

IV. Preloženje ravnine i projekcije ravnih likova.

52. Preloženje ravnine oko traga u jednu ravninu projekcijâ. Neki lik, koji je u zadanoj ravnini ρ, prikazat će se najlakše u pravoj veličini, ako ga zajedno s ravninom okrenemo oko 1. ili 2. traga u ravninu Π_1 dotično Π_2 (gl. o tome u § **17.**, sl. 53.).

U slici je 138. predočena ravnina ρ tragovima r_1 i r_2. U njoj je zadana točka Q', Q''. Da se ravnina ρ zaokrene oko r_1 u Π_1, odredit će se prije svega njezin prikloni kut α s Π_1. Kroz Q' će se povući 1. projekcija priklonice $Q' S$, pa oko nje na stranu prebaciti točka Q u (Q); bit će kao prije $Q'(Q) = Q'' L$. Dužina $(Q)S$ znači pravu veličinu daljine točke Q od traga r_1. Kod okretanja ravnine opisat će Q u prostoru luk, kojemu je ravnina normalna na r_1; polumjer toga luka bit će $S(Q)$, a središte mu je S. Kad se ravnina preklopi za kut α u Π_1, doći će Q u Q^1_0; preklopi li se ρ na drugu stranu za kut 180—α,

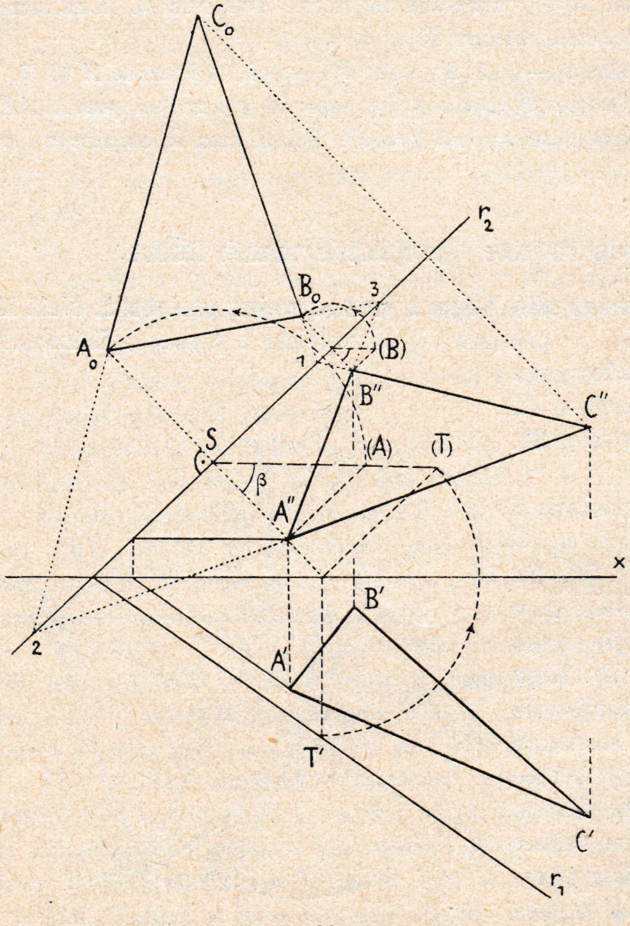


Sl. 138.

*

doći će Q u Q_0. Sve točke istoga lika u ravnini ρ moraju se preložiti za isti kut (α ili $180^0 - \alpha$)!

Ako je obrnuto poznat preložaj $Q^1{}_0$ neke točke Q, koja je u ravnini ρ, povući će se $Q^1{}_0 S \perp r_1$, odrediti prikloni kut α, i iz S opisati s polumjerom $SQ^1{}_0$ luk, koji krak $S(Q)$ priklonoga kuta siječe u (Q). Iz (Q) spuštena okomica na $Q^1{}_0 S$ ima nožište Q', a to je prva projekcija točke Q. Druga će se projekcija Q'' naći tako, da se učini $(Q)Q' = LQ''$, ili će se upotrebiti sutražnica. Slično se tako dolazi iz Q_0 okretom $180-\alpha$ do (Q) i Q'.

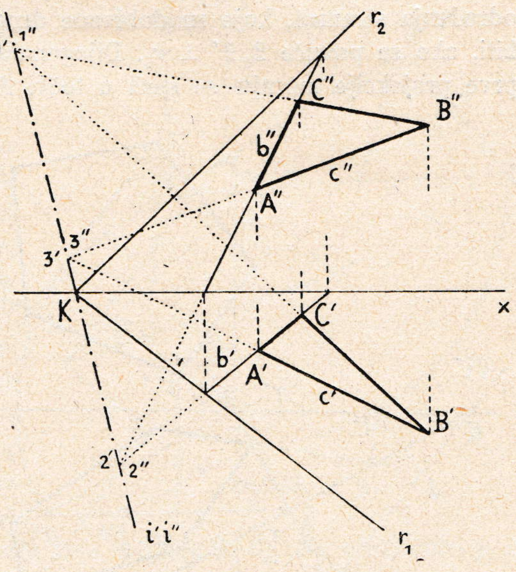


Sl. 139.

U sl. 138. okrenut je oko r_1 i cijeli drugi trag r_2 tako, da se istim postupkom zaokrenula jedna točka R traga r_2 u R_0. Oba traga r_1 i r_2 čine dakle u prostoru kut, koji se u preložaju vidi u pravoj veličini (δ). Obje su dužine KR i KR_0 jednake. (Isp. Bilješku u § **39.**).

U slici 139. preložen je istumačenim načinom trokut ABC ravnine $\rho \equiv r_1, r_2$ oko r_2 u Π_2. Preloženi su vrhovi A i B; stranica se dakle AB prikazuje u pravoj veličini u preložaju $A_0 B_0$. Točka 3, u kojoj $A'' B''$ siječe trag r_2, ne miče se za okretanja ravnine sa svoga mjesta; tom će dakle točkom 3 prolaziti i preložaj $A_0 B_0$. Na tome je temelju određen preložaj C_0 za C. Stranica AC siječe r_2 u točki 2, kojom će prolaziti i preložaj $A_0 C_0$; povući će se dakle pravac $2\,A_0$, koji okomicu iz C'' na r_2 siječe u C_0. Produženi prušci $B''\,C''$ i $B_0\,C_0$ moraju se opet sjeći na r_2 u točki 1, pa se tako kontrolira točnost crtnje!

53. Upotreba osi istovetnosti za zadanu ravninu. Točka, u kojoj se sijeku obje normalne projekcije nekoga pravca b', b'' (slika 140.), mora se obilježiti dvojako: $2'$ i $2''$. To su naime obje projekcije one točke 2 na pravcu b, koja je ujedno u ravnini istovetnosti (raspolovna ravnina II. i IV. kvadranta; gl. zadatak 132.) Svi pravci neke ravnine ρ imat će probodišta s ravninom istovetnosti, t. j. točke $1'$, $1''$; $2'$ $2''$; $3'$, $3''$ ...., na istome pravcu, t. j. na presječnici ravnine ρ s ravninom istovetnosti ι. Taj pravac zvat ćemo os istovetnosti; obilježit ćemo ga s i', i''. Točka K, u kojoj se na x sijeku oba traga r_1 i r_2 ravnine ρ, zajednička je za ρ i za ι; ona će zato biti na presječnici i', i''. Drugim riječima, os istovetnosti za ρ i ι prolazi točkom $K \equiv (r_1\, r_2)$. Čim je os i', i'' poznata, možemo nacrtati kojigod pravac u ravnini ρ s pomoću te osi. Treba na pr. samo neku točku $3'$, $3''$ na i', i'' spojiti s projekcijama A' i A'' neke točke u ravnini ρ, pa su se tim dobile obje projekcije c' i c'' pravca, koji je u ρ. U slici 140. određene su tim načinom obje projekcije trokuta ABC u ρ, a da se nijesu uzele u pomoć sutražnice. Taj se postupak može dobro upotrebiti u rješenju zadaće, koja slijedi.

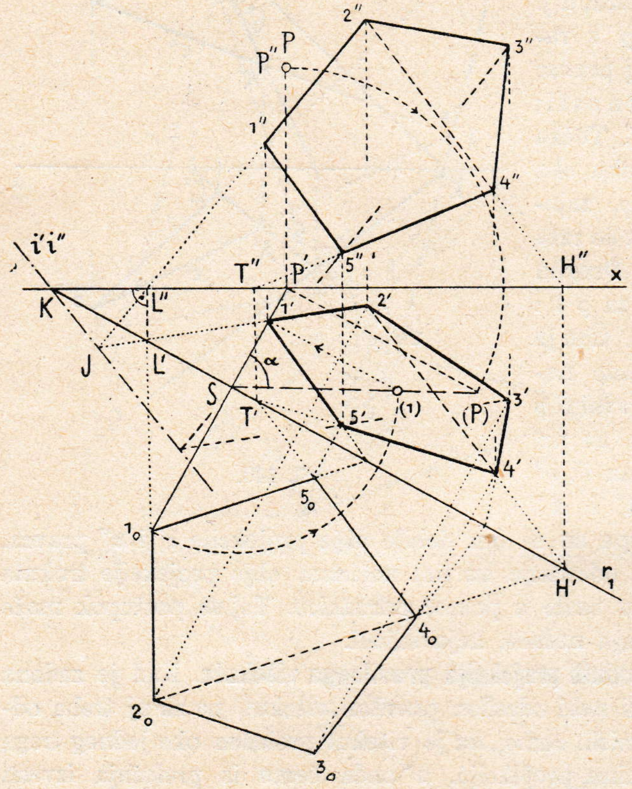


Sl. 140.

54. Određenje normalnih projekcija pravilnoga višekuta. Kad je zadana ravnina ρ, u kojoj će biti neki određen pravilan višekut, pa za nj treba odrediti obje projekcije, zamislit ćemo, da je višekut preložen oko jednog traga ravnine u pripadnu ravninu projekcijâ, a onda ćemo iz preložaja izvesti obje projekcije, kao što je u § **62.** izvedeno za točku Q (gl. ujedno postupak u sl. 54.).

U slici 141. poznat je preložaj $1_0 2_0 3_0 4_0 5_0$ pravilnoga peterokuta i ravnina ρ, u kojoj će biti taj lik. Ravnina je zadana tragom r_1 i točkom $P \equiv P''$ drugoga traga. Preloženjem priklonice 1. skupine za točku P u pravac $S(P)$ dobio se prikloni kut α ravnine ρ prema Π_1. Vrh 1 peterokuta (1 leži na priklonici PS) ima prvu projekciju $1'$, koja se dobiva poznatim načinom iz 1_0 i priklonoga kuta α. Visina točke 1 nad Π_1 mjeri se u preložaju (1) $1'$. Projekcija $2'$ vrha 2 ne mora se tražiti istim putom, nego se

može odmah povući stranica $1'2'$; odredit će se naime L' kao sjecište od r_1 i $1_0 2_0$, a onda povući $L'1'$. Budući da je L' točka na r_1, bit će L'' u osi x. Pravci $1'L'$ i $1''L''$ sjeći će se na osi istovetnosti i', i'' za ρ. Tako se dobio smjer stranice $1''2''$ i ujedno se odredila os i', i''; ta se os može upotrebiti za određenje drugih vrhova peterokuta ili za kontrolu o točnosti određenja stranicâ, koje su dobivene drugim načinom. Točka će se $2'$ dobiti, ako se povuče $2_0 2' \perp r_1$. Dijagonala $2_0 4_0$ preložaja i dijagonala $2'4'$ prve projekcije moraju se sjeći u točki H' traga r_1. Ta će točka imati 2. projekciju H'' na x, kojom mora ići druga projekcija iste one dijagonale, t. j. $2''4''$.



Sl. 141.

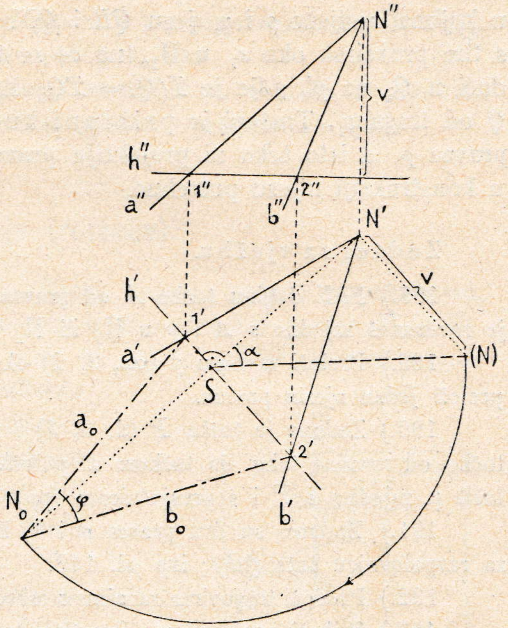
Postupak ostaje isti, ako se preložaj lika uzme u Π_2, a onda se izvede druga i prva projekcija.

55. Okretanje ravnine u položaj paralelan s Π_1 ili s Π_2. Ako ravnina nije zadana tragovima (nego dvama raznosmjernim ili paralelnim pravcima) ne može se ona preložiti oko traga u koju ravninu projekcija. U tome se slučaju ravnina zakreće oko jedne svoje sutražnice 1. ili 2. skupine u položaj paralelan s Π_1 ili s Π_2.

U slici 142. zadana je ravnina pravcima a i b, koji se sijeku u točki N. Os x nije poznata. Izabrat ćemo po volji h'' normalno na ordinale i s pomoću $1''$ i $2''$ odrediti $h' \equiv 1'2'$. Oko horizontalne sutražnice h okrenut ćemo ravninu (a, b), dok bude paralelna s Π_1. Priklonica točke N bit će $NS \perp h$, dakle $N'S \perp h'$; preloži li se N na stranu u (N), gdje je $N'(N) = v$, bit će $S(N)$ preložena priklonica u onu ravninu σ, koja ide kroz h paralelno s Π_1. Tako se opet javlja prikloni kut α ravnine (a, b) prema Π_1. Točka N, zaokrenuta oko h u pomenutu ravninu σ,

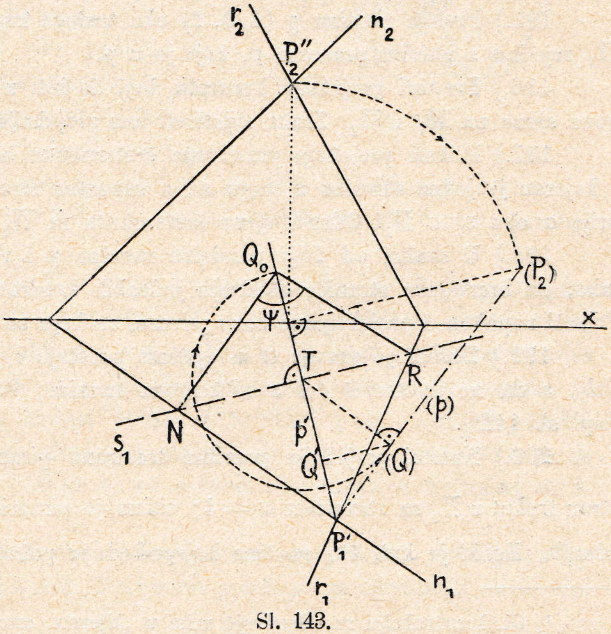
dolazi u položaj N_0. Kod okretanja se nijesu točke 1 i 2 pomicale; zato će $1' N_0$ i $2' N_0$ biti zaokrenuti položaji a_0 i b_0 pravaca a i b u ravnini σ. Tim je načinom ujedno određen kut φ obadvaju tih pravaca, koji se vidi u pravoj veličini, jer je u ravnini $\sigma \parallel \Pi_1$.

Prikazanim se postupkom može naći prava veličina kojegagod ravnoga lika, a i obrnuto se mogu odrediti obje projekcije lika, od kojega je poznata prava veličina.



Sl. 142.

56. Prikloni kut dviju ravnina ρ **i** ν. Ravnine ρ i ν zadane su tragovima r_1, r_2 i n_1, n_2 (slika 143.). Na presječnicu p tih ravnina položit će se gdjegod normalna ravnina σ, koja će obje zadane ravnine sjeći u kracima priklonoga kuta ψ (gl. § **6**., *3*). Na presječnici p izabrana je točka Q. Presječnica je p preložena oko p' zajedno s točkom Q u (p) i (Q). U točki (Q) uzdignuta je na (p) normala, koja p' siječe u T. Tom je točkom T napokon položen trag s_1 ravnine σ normalno na p'. Ravnina σ ide zaista točkom Q te je na p normalna. Njezin je naime 1. trag $s_1 \perp p'$, a osim toga je priklonica TQ ravnine σ normalna na p, jer je $T(Q) \perp (p)$. Projekcije obadviju presječnica,



Sl. 143.

u kojima σ siječe ρ i ν, jesu QR i QN. Zaokrenemo li ravninu σ zajedno s tim pravcima oko s_1 u Π_1, ne će se točke R i N micati, a točka će Q doći u Q_0 na p', gdje je $T(Q) = TQ_0$ kao prava dužina udaljenosti točke Q od traga s_1. Traženi je priklonі kut $\sphericalangle RQ_0N = \psi$. Druga projekcija p'' pravca p, a isto tako ni projekcije pravaca QN i QR nijesu nacrtane, jer u konstrukciji nijesu potrebne.

Zadaci za vježbu.

188.) Nađi daljinu točke A od pravca p tako, da položiš ravninu (Ap) pa je zaokreneš zajedno s A i p u Π_1 ili Π_2 oko 1. ili 2. traga.

189.) Preloži ravninu ρ (∞, 3, 2) oko traga r_1 u Π_1. Zajedno s ravninom preloži jedan njezin pravac.

190.) Zadana je točka P (2, 3, 4) i ravnina ρ (—1, 2, 1). Nađi daljinu te točke od ravnine tako, da točkom P položiš kojugod ravninu $\mu \perp \rho$, a onda preložiš μ zajedno s P i s presječnicom $(\mu\rho)$.

191.) Zadana su dva pravca a i b, koji se sijeku u N. Odredi projekcije za raspolovnicu kuta (ab); isp. sl. 142.

192.) Predoči tragovima ravninu σ tako, da bude u prostoru kut $(s_1 s_2) = 75^0$.

193.) Prikaži projekcijama istostran trokut ABC, koji je u ravnini ρ (—2, 3, 4). Stranica $AB = 5$. Odredi sjene trokuta na Π_1 i Π_2 za paraletnu rasvjetu.

194.) Odredi prikloni kut dviju ravnina ρ i σ, koje imaju prve tragove paralelne.

195.) Preloži ravninu ρ (2, 3, 2) oko trećega traga r_3 u pobočnu ravninu Π_3 zajedno s jednim pravcem p, koji je u ρ.

196.) Predoči projekcije kvadrata, koji će biti u ravnini ρ (2, ∞, 4), i njegove sjene na Π_1 i Π_2. Zraka svjetlosti ima projekcije $s'\, x = 45^0$ i $s''\, x = 45^0$.

197.) Prikaži projekcije pravilnoga šesterokuta, koji je u ravnini σ (∞, 3, 4) i kojemu je jedna stranica u tragu s_1, a suprotna stranica u tragu s_2. Preloži najprije σ oko s_1 u Π_1. Odredi sjene šesterokuta na Π_1 i Π_2.

198.) U svakoj od dvije paralelne ravnine μ i ν prikaži projekcije kvadrata tako, da homogene stranice obadvaju jednakih kvadrata budu izmjenice paralelne. Prikaži napokon u projekcijama kosu prizmu, za koju su pomenuti kvadrati osnovke.

199.) Zadan je pravac a u općenu položaju i pravac $b \parallel \Pi_1$. Odredi kut (ab), a da ne upotrebiš osi x ni tragova ravnine, što je određuju pravci a i b (isp. sl. 142.).

200.) Nacrtaj projekcije pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovka istostran trokut u Π_1 sa stranicom $a = 4$; visina je piramide $v = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (pravilni tetraedar)[1]. Koliki je kut, što ga čine kojegod dvije pobočke tetraedra? (Gl. sl. 71.).

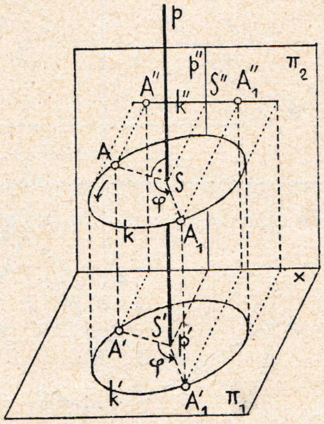
[1]) Gl. konstrukciju za određenje vrha u „Mjerstv. crtanju za IV. razr.“, § 18.

201.) Zadana su dva mimosmjerna pravca p i q projekcijama na Π_1 i Π_2. Koliki je kut, što ga čine ta dva pravca? (Gl. § **4.**, *4*).

202.) Odredi prikloni kut osi x prema ravnini σ (2, —1, 3). Položi kroz x ravninu $\mu \perp \sigma$, a onda preloži ravninu μ zajedno s presječnicom $(\mu\sigma)$.

V. Okretanja (rotacije).

57. Okretanje točke oko pravca. Tijelo, koje je zadano projekcijama, može se okretanjem oko pravca dovesti u nov položaj prema Π_1 i Π_2. Takvo se okretanje poduzima kadšto zato, da položaj poslije okretanja bude neki poseban, osobit, na pr. kod određenja pravih veličina. Često se obrnuto dovodi tijelo, koje je prema ravninama projekcijâ u specijalnom položaju, okretanjem oko pravca u posve općen položaj zato, da predstava tijela bude jasnija.



Sl. 144.

Točka A, koja se okreće oko nekoga pravca $p \perp \Pi_1$ (slika 144.), opisuje kružnicu k, kojoj je ravnina normalna na p, dakle paralelna s Π_1, a središte joj je S probodište pravca p s ravninom kružnice k. Pravac se p zove *os okretanja*.

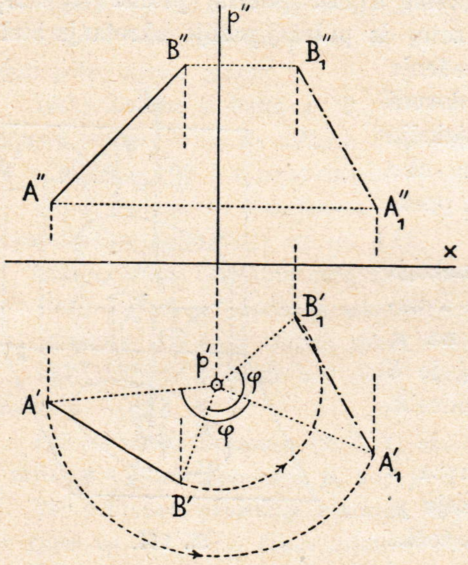
Za okretanje točke A oko pravca p mora dakle biti poznato: *os okretanja* p, *polumjer* AS kružnice k, koju opisuje točka A oko osi (taj je polumjer jednak pravoj veličini daljine točke A od osi p), *kut* φ, za koji se točka A zakreće, i napokon *smisao kretnje* (na jednu ili drugu stranu oko p). Smisao kretnje označuje se strjelicom.

U sl. 144., gdje je os p Π_1, vidjet će se kružnica k (koja je u prostoru paralelna s Π_1) u *prvoj* projekciji k' u pravoj veličini; druga će joj projekcija k'' biti pružac paralelan s osi x. Kut φ, za koji se zakreće točka A, vidi se opet u pravoj veličini u Π_1. Poslije okreta za kut φ, kojemu je smisao naznačen strjelicom, dolazi točka A u položaj A_1. Taj se položaj određuje u prvoj projekciji, a druga se projekcija izvodi iz prve. Ako je os okretanja normalna na Π_2, vidjet će se odnosi okretanja u *drugoj* projekciji u pravoj veličini.

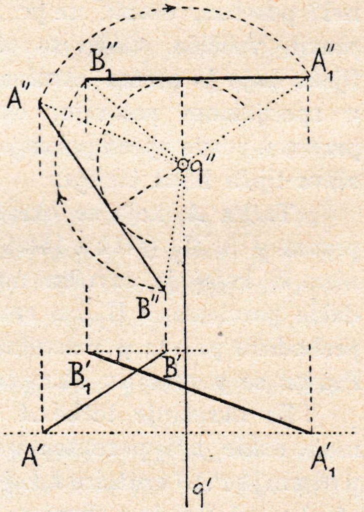
Ako se oko pravca p zakreće cijelo tijelo u nov položaj, opisuje svaka točka tijela na tome putu isti kut φ. Točke osi p ostaju za okretanja na svome mjestu.

U slici 145. okrenute su krajne točke prušca $A'B'$, $A''B''$ oko osi p', p'', koja je normalna na Π_1, u nov položaj $A'_1B'_1$, $A''_1B''_1$ za kut φ. Točka A opisuje kružnicu, kojoj prva projekcija ima središte p'; polumjer je te kružnice daljina $A'\ p'$. Slično vrijedi i za točku B. Iz slike izlazi, da su trokuti $A'B'p'$ i $A'_1B'_1p'$ sukladni.

Najjednostavniji primjeri za okretanje prikazani su već u § 52.—56. Preloženje ravnine oko traga u ravninu projekcije nije drugo negoli okretanje oko osi, koja je u tome slučaju trag ravnine. Polumjer okretanja za neku točku A ravnine oko njezina traga jednak je pravoj veličini priklonice



Sl. 145.



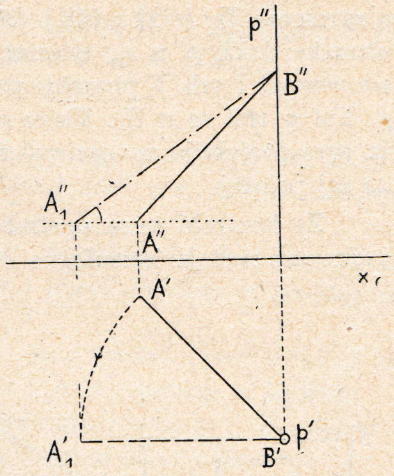
Sl. 146.

za tu točku, dakle dužini AS, ako je S nožište priklonice na tragu. Kut okretanja jednak je priklonom kutu ravnine prema dotičnoj ravnini projekcijâ ili pak suplementu toga kuta, već prema tomu, prelaže li se ravnina na jednu ili na drugu stranu.

58. Okretanje prušca u osobit položaj. Da se odredi prava veličina prušca AB, može se pružac okrenuti oko nekoga pravca, na pr. $q \perp \Pi_2$, toliko, da bude paralelan s Π_1. U tome će se položaju vidjeti u 1. projekciji ujedno njegova prava veličina, a i prikloni njegov kut prema Π_2 (isp. § **20.** i § **33.**).

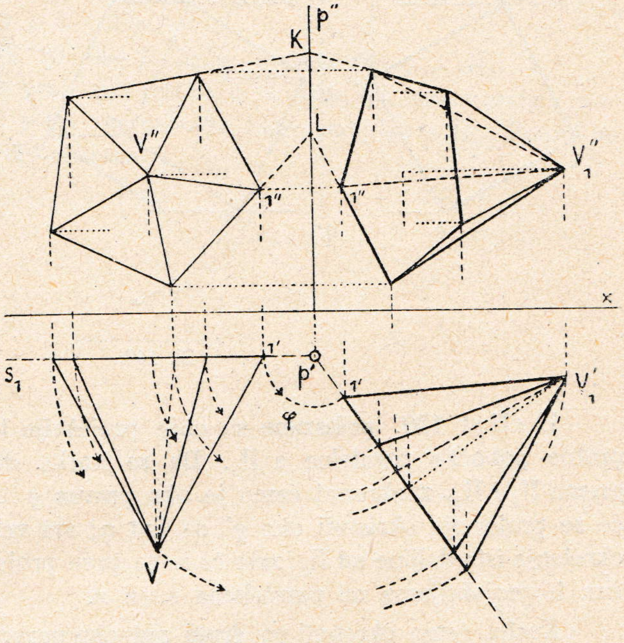
Druga projekcija $A''B''$ prušca AB okrenuta je oko druge projekcije q'' osi okretanja u položaj $A''_1B''_1$ (slika 146.) tako, da je $A''_1B''_1 \parallel x$. To je učinjeno tako, da se nacrtala kružnica, kojoj je središte q'' i koja

dotiče projekciju $A''B''$. Na tu je kružnicu povučena horizontalna tangenta, a u tu su tangentu zaokrenute točke A'' i B'' u položaje A''_1 i B''_1. Trokuti $q'A''B''$ i $q''A''_1B''_1$ moraju naime biti sukladni, zato su i visine vrha q'' od osnovaka $A''B''$ i $A''_1B''_1$ jednake. U prvoj se projekciji prikazuju lukovi, koje opisuju točke A i B kod okretanja paralelno s Π_2, kao pravci, paralelni sa smjerom osi x; na tim će se pravcima odrediti ordinalama projekcije A'_1 i B'_1. Prava je dakle dužina prušca AB jednaka $A'_1B'_1$, jer je $A_1B_1 \parallel \Pi_1$, a $\sphericalangle B'B'_1A'_1$ prikloni je kut prušca AB s Π_2. Taj se kut okretanjem nije promijenio. U cijeloj konstrukciji nije upotrebljena os x, jer je svejedno, koju daljinu imaju prušci AB i A_1B_1 od ravnine Π_2.



Sl. 147.

Ista je zadaća riješena u slici 147. drugim načinom. Tu je zadan pružac AB, koji treba okrenuti oko osi $p \perp \Pi_1$, dok ne bude paralelan s Π_2. Os je p položena točkom B, koja će za okretanja ostati na istome mjestu. Točka A okrenuta je u A_1, gdje je $A'_1B' \parallel x$; projekcija A''_1 ima nad Π_1 istu visinu kao i A''. Budući da je pružac u novome položaju A'_1B', A''_1B'' paralelan s Π_2, bit će A''_1B'' njegova prava veličina. Ujedno je kut $A''A''_1B''$ prikloni kut toga prušca prema Π_1. I u toj se konstrukciji može os x izostaviti.

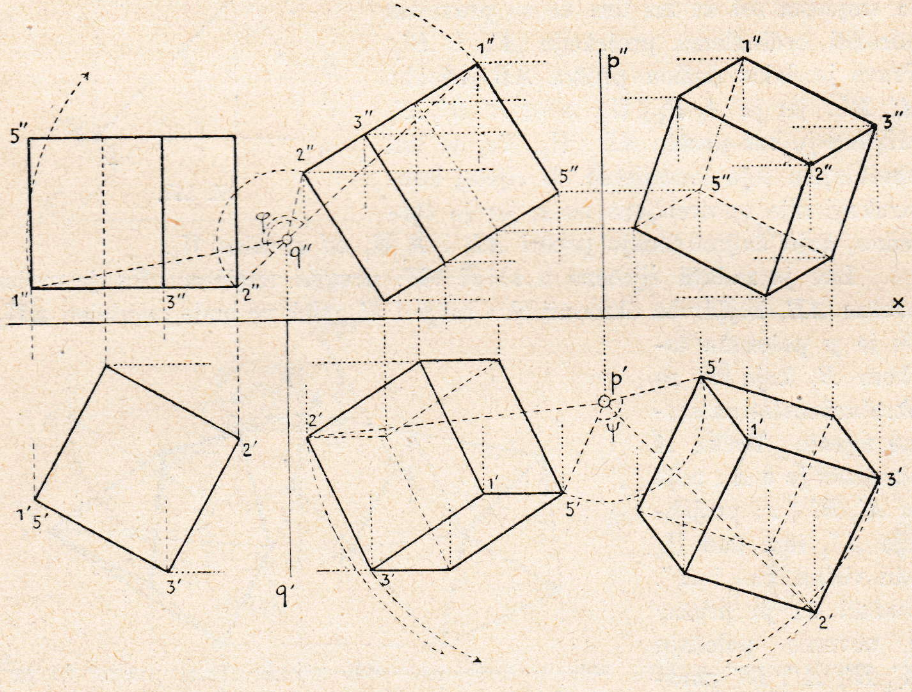


Sl. 148.

59. Okretanje tijela u općeniji položaj. Pravilna peterostrana piramida položena je u prostoru tako, da joj je ravnina σ osnovke paralelna

s ravninom Π_2 (slika 148.). Oko pravca $p \perp \Pi_1$, koji je izabran u ravnini osnovke, dakle p' u s_1, okrenut ćemo piramidu u općeniji položaj. Svi vrhovi na osnovci i vrh V piramide zaokrenut će se za isti kut φ oko osi okretanja p. Kut φ vidi se u Π_1. Visine svih vrhova nad Π_1 ostat će za okretanja iste. Iz prve projekcije novoga položaja izvest će se dakle lako druga projekcija za taj položaj.

Za kontrolu će se upotrebiti točke K, L . . . na osi okretanja (p''), u kojima se sastaju homologne stranice osnovke prije i poslije okretanja.



Sl. 149.

U slici 149. prikazane su obje projekcije kocke, kojoj su dvije suprotne pobočke paralelne s Π_1. Da se kocka dovede u općeniji položaj prema Π_1 i Π_2, zaokrenut ćemo je oko pravca $q \perp \Pi_2$ za neki kut φ. Druga će se projekcija okrenuti oko q'' za kut φ; svi vrhovi kocke zadržavaju za okretanja iste daljine od Π_2, zato će nove prve projekcije vrhova biti sa starim 1. projekcijama na paralelama s osi x.

Kocku ćemo okrenuti po drugi put oko pravca $p \perp \Pi_1$ za kut ψ. Prva će se projekcija okrenuti oko p' za kut ψ; visine vrhova nad Π_1 ostat će za toga okreta iste, zato će nove druge projekcije biti na paralelama s osi x.

Tako je kocka došla u posve općen položaj prema Π_1 i Π_2; nijedna joj pobočka, a i nijedan brid nije više paralelan ni s Π_1 ni s Π_2.

Zadaci za vježbu.

203.) Zadana je točka A (—2, 4, 3), os okretanja $p \perp \Pi_1$, p' (0, 2, 0) i ravnina σ (—1, 3, 1·5). Okreni A oko p, dok A dođe u σ. Dva su položaja moguća!

204.) Zadan je pravac $m \parallel \Pi_1$ i točka P. Okreni točku P oko m za kut $\varphi = 60^0$. Položi kroz P ravninu okomito na m i prikaži okretanje u preložaju te ravnine.

205.) Oko pravca p, koji ima u prostoru općen položaj, okreni točku A za 60^0. Položi točkom A ravninu $\alpha \perp p$, preloži α i izvrši okretanje u preložaju.

206.) Okreni piramidu u sl. 123. oko određenoga pravca $q \perp \Pi_2$, dok vrh V dođe u Π_1, a osnovka bude paralelna s Π_1. Kako se mora izabrati q?

207.) Okreni tetraedar, određen u zadatku 200., oko pravca $q \perp \Pi_2$, dok jedan pobočni brid tetraedra bude paralelan s Π_1 (isp. sl. 146.).

208.) Okreni tijelo u sl. 84. najprije oko pravca $p \perp \Pi_1$, a onda oko $q \perp \Pi_2$, kao u sl. 149.

209.) Okreni piramidu u sl. 148. još jedamput oko pravca $q \parallel \Pi_2$.

210.) Okreni paralelogram u sl. 135. oko sutražnice h za 90^0; upotrebi 3. projekciju za istu os ${}_1x_3$ kao u sl. 135.

211.) Okreni tijelo u sl. 83. oko $p \perp \Pi_1$, a onda oko $q \perp \Pi_2$.

212.) Nacrtaj normalne projekcije prizme u sl. 124., pa okreni prizmu oko pravca q, koji je u Π_1, dok jedna uža pobočka bude paralelna s Π_1. Pravac je q paralelan s osnovkom te uže pobočke.

Drugi dio.

Prvi odsjek.

Projekcije uglastih tjelesa u općenu položaju.

60. Postanak uglastih tjelesa. Uglasta tijela ili polijedri omeđeni su trokutima ili ravnim višekutima (dijelovima ravninâ). Jedan je od tih višekuta osnovka, a ostali su pobočke tijela. Dvije se susjedne pobočke sijeku u bridu tijela. Razlikujemo bridove pobočaka i bridove osnovke.

Među uglasta tjelesa ubrajamo prizmu, piramidu, pravilne polijedre i kristalne oblike uopće.

Prizma postaje, ako se neki pravac miče po zadanom višekutu tako, da ostaje neprestano paralelan s početnim položajem. Zadani se višekut zove osnovka, a pravac, koji se miče, naziva se izvodnicom. Kad izvodnica ide kojim vrhom osnovke, postaje bridom prizme. Ako su izvodnice normalne na ravnini osnovke, prizma je uspravna, inače kosa. Ako je prizma uspravna, a osnovka joj je pravilan višekut, zove se prizma pravilna.

Piramida postaje tako, da se neki pravac miče po zadanom višekutu, a ide ujedno nekom čvrstom točkom V, koja je izvan ravnine višekuta. Višekut je osnovka, a V vrh piramide. Pravac, koji micanjem izvodi piramidu, zove se u svakom položaju izvodnicom; izvodnica postaje bridom, kad ide kojim vrhom osnovke. Vrh i svaka stranica osnovke određuju po jedan pobočni trokut piramide.

Ako su bridovi na svim pobočkama jednako dugi, onda je osnovka višekut, upisan kružnici; spojnica vrha sa središtem te kružnice bit će visina piramide, za koju se onda kaže, da je uspravna. Piramida će se zaista i činiti uspravna, ako je središte pomenute kružnice u ploštini osnovke, a

ne izvan nje. Piramida je kosa, ako su joj bridovi pobočaka nejednaki. Normala, spuštena iz vrha na ravninu osnovke, zove se visina kose piramide. Ako je piramida uspravna, a osnovka joj je pravilan višekut, zove se piramida pravilnom.

Zamislimo li, da se izvodnice piramide produže preko vrha, nastat će nad vrhom drugi dio iste one (donje) piramide.

Piramidu i prizmu možemo jednim imenom nazvati i uglastim tračnim tjelesima, jer se na njima nalaze izvodnice (traci).

Pravilni polijedri zovu se napose oni, koji su omeđeni samim pravilnim i sukladnim višekutima. Ima ih pet: tetraedar (omeđen s četiri sukladna istostrana trokuta), heksaedar ili kocka (omeđena sa šest kvadrata), oktaedar (omeđen s osam istostranih sukladnih trokuta), pentagonalni dodekaedar (omeđen s dvanaest pravilnih sukladnih peterokuta) i ikozaedar (omeđen s dvadeset istostranih sukladnih trokuta).

Bilješka. Pravilne je polijedre istražio iscrpljivo Euklid u XIII. knjizi svojih Elemenata i pokazao, da ih može biti samo pet. Zovu ih i Platonova tjelesa. U 17. vijeku bavio se tim polijedrima astronom Kepler.

Među kristalnim oblicima (a njima pripadaju i „pravilni polijedri") ima i takovih, koji su omeđeni sukladnim rombima (gl. sl. 74. i 159.) ili sukladnim deltoidima i t. d. Ima i takovih oblika, kojima oplošje čine raznovrsni višekuti, kao na pr. trokuti i kvadrati (gl. sl. 153.), trapezi i i kvadrati i t. d. Kod kristalâ dolaze osobito u obzir simetrije tijela prema osima i određenim ravninama. U kristalografiji, koja proučava kristalne oblike, svrstani su svi ti oblici u 6 sustava već prema svojstvima osi.

61. Projekcije i sjene uspravne prizme. U ravnini $\tau \equiv t_1, t_2$, $\tau \perp \Pi_1$ (slika 150.) namješten je pravilan šesterokut 1 2 3 4 5 6 tako, da mu je stranica 2 3 u tragu t_1. Šesterokut neka bude osnovka uspravne prizme; jedan će pobočni pravokutnik prizme biti u ravnini Π_1.

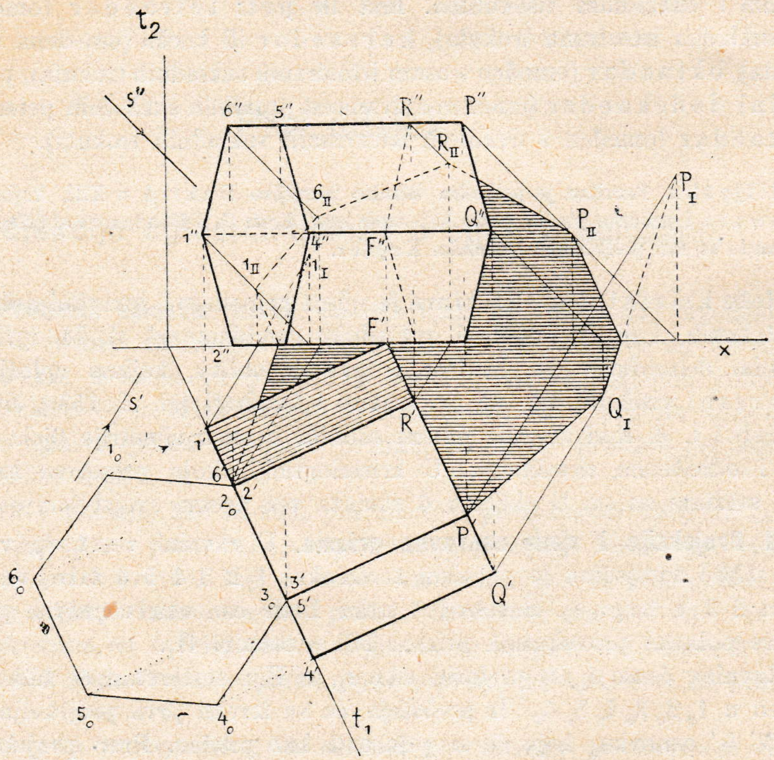
Ravninu ćemo t_1, t_2 preložiti oko t_1, u Π_1; šesterokut će biti ujedno preložen u $1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_6$. Iz preložaja će se izvesti prva projekcija $1' 2' 3' 4' 5' 6'$ osnovke, koja će se prikazati kao pružac. Prve projekcije za bridove oplošja bit će pravci, normalni na t_1.

Druga projekcija osnovke dobit će se ordinalama iz prve projekcije; visine pojedinih vrhova osnovke nad Π_1 mjere se u preložaju. Tako je visina točke $1''$ nad x jednaka daljini $1' 1_0$, i t. d.

Gornji je osnovni šesterokut prizme položen paralelno s donjim tako, da je jedan vrh F gornje osnovke u Π_2; dakle njegova prva projekcija F' u osi x. Druga je projekcija gornje osnovke $QPRF$ ... sukladan šesterokut s drugom projekcijom osnovke. Pobližom predodžbom odlučit će se lako vidljivi dijelovi od nevidljivih u Π_1 i Π_2.

Uz projekcije prizme određena je još i sjena njezina na Π_1 i Π_2. Vrh Q gornje osnovke baca sjenu na Π_1 u Q_I (projekcije s', s'' za smjer paralelnih zrakâ svjetlosti označene su strjelicama). Sjena susjednoga vrha P gornje osnovke pala bi na Π_1 iza ravnine Π_2 u P_1. Sjena se brida QP lomi na osi x. Sjena gornje osnovke na ravninu Π_1 polazi od vrha, koji je u Π_1 ispod P. Sjena vrhova P i R na Π_2 jesu točke P_{II} i R_{II}.

Sjena donje osnovke na Π_1 polazi od vrha 2, koji je u Π_1, prema sjeni 1_I vrha 1; sjena brida 12 lomi se dakle na osi x i polazi prema sjeni



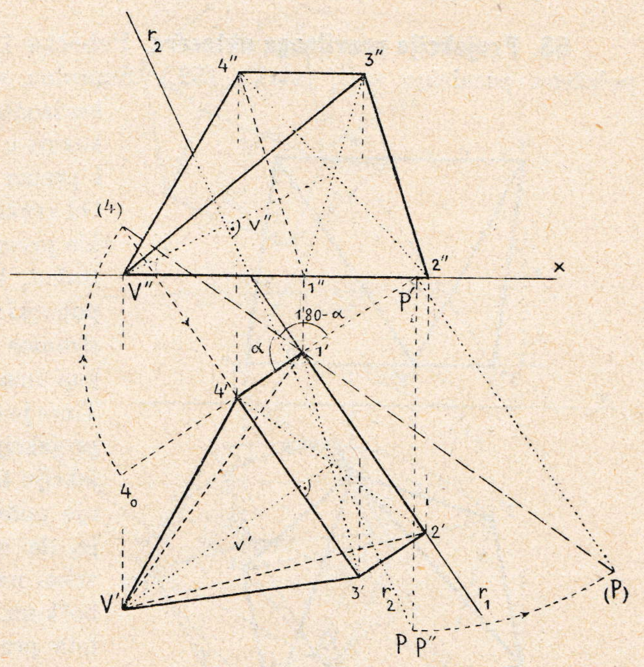
Sl. 150.

1_{II} vrha 1 na Π_2. Sjena brida 16 pada sasvim na Π_2 u pružac $1_{II}\,6_{II}$. Obje sjene 6_{II} i R_{II} daju sjenu pobočnoga brida $6\,R$ na ravninu Π_2. Tako je određena kontura bačene sjene; ostali dijelovi bacaju sjenu u prostor, koji je omeđen pomenutom konturom.

Od vidljivoga dijela prizme u prvoj projekciji ne dobiva izravnu svjetlost pobočka $1\,6\,R\,F$, pa je to u slici naznačeno time, što je ta pobočka šrafirana.

Bilješka. Bridovi TQ (T je u Π_1 ispod P) i 1 2 nijesu u prostoru paralelni, zato ne će ni njihove sjene na istu ravninu, na Π_1, biti paralelne, t. j. pravci su $P' Q_I$ i $2' 1_I$ raznosmjerni! Naprotiv bi sjena brida 5 6 na π_2 bila jednako duga i paralelna sa sjenom $P_{II} R_{II}$, jer su bridovi 5 6 i PR u prostoru jednaki i paralelni.

62. Projekcije uspravne piramide, kojoj je osnovka u zadanoj ravnini. U ravnini $\rho = r_1, r_2$ zadan je kvadrat 1 2 3 4, kojemu je jedna stranica 1 2 u tragu r_1 ravnine ρ (slika 151.). Odredit ćemo obje projekcije uspravne piramide, kojoj je zadani kvadrat osnovka, a vrh joj je V u Π_1. Piramida će ležati svojom pobočkom V 1 2 u Π_1.



Sl. 151.

S pomoću točke P, koja je na tragu r_2 ispod Π_1, i kojoj je prva projekcija P' u osi x, ($P' 1' \perp r_1$) dobiva se preložaj $1'$ (P) priklonice za točku P; taj preložaj čini s projekcijom $1' P'$ priklonice prikloni kut $180^0 - \alpha$ ravnine ρ prema Π_1. To je tupi kut, koji zatvora desna strana ravnine ρ s Π_1. Pravi je priklon α, jer je ravnina ρ prema Π_1 nagnuta na lijevu stranu.

Stranica 1 4 kvadrata preložena je oko traga r_1 u $1' 4_0 = 1' 2'$; taj je preložaj normalan na r_1, jer je stranica 1 4 na r_1 normalna. Iz preložaja 4_0 dobiva se poznatim načinom (4), a onda projekcija $4'$ vrha 4; visina je toga vrha nad Π_1 jednaka dužini $4'$ (4). Tim je načinom određena prva i druga projekcija $1' 2' 3' 4'$, $1'' 2'' 3'' 4''$ osnovnoga kvadrata.

Dijagonalama će se odrediti središte osnovke, a onda tim središtem povući visina piramide okomito na ravninu ρ. Prva će projekcija v' visine biti normalna na r_1, a druga projekcija v'' normalna na r_2. Visina v probada ravninu Π_1 u vrhu V, koji ima svoju drugu projekciju V'' na osi x.

Poradi posebnoga položaja ravnine ρ bit će osnovni kvadrat u prvoj projekciji potpuno vidljiv; isto će tako biti u Π_1 vidljiva još jedna trokutasta

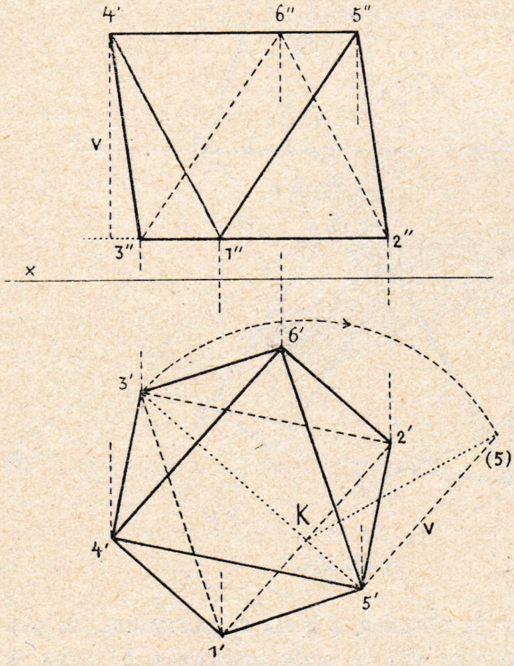
pobočka. Osnovni je kvadrat u drugoj projekciji zastrt prednjom i gornjom pobočkom piramide.

Zadaci za vježbu.

213.) Odredi bačenu sjenu piramide u sl. 151. na osnovnu ravninu ρ tako, da sjena vrha V bude točka V_{*}'' nad osi x.

214.) Prikaži bačenu sjenu prizme u sl. 150. na osnovnu ravninu τ za smjer zrakâ svjetlosti, upotrebljen u sl. 150., no upravljen u protivnom smislu.

63. Projekcije pravilnoga oktaedra. Pobočka 1 2 3 oktaedra neka bude položena paralelno s Π_1 (slika 152.). Suprotna se pobočka (t. j. gornja horizontalna pobočka 4 5 6) prikazuje u Π_1 koncentrično s donjom i prema njoj zaokrenuta za 180°. Od svake stranice gornje pobočke ide prema dolje po jedan pobočni trokut, kojemu je vrh na donjoj pobočki; obrnuto polazi od svake stranice donje pobočke trokut, koji ima vrh na gornjoj pobočki. Time je oktaedar prikazan u prvoj projekciji potpuno. Za drugu projekciju treba poznati visinu v gornje pobočke nad donjom. Dosta je, da se odredi visina jednoga vrha, na pr. 5, nad donjom pobočkom. Ta će visina v biti kateta pravokutnoga trokuta (kod 5), kojemu je jedna kateta projekcija $5'\,K$ one visine pobočnoga trokuta 1 2 5, koja ide iz vrha 5 normalno na osnovku 1 2. Hipotenuza pomenutoga pravokutnoga trokuta bit će prava veličina visine $5\,K = K\,3'$. Pravokutan se dakle trokut $K\,5'\,(5)$ može sastaviti, pa je $5'\,(5) = v$ tražena visina vrha 5 nad donjom osnovkom. Vrhovi 4, 5, 6 imaju nad Π_1 istu visinu v. Vidljivi i nevidljivi dijelovi u Π_2 izlaze lako iz prve projekcije.



Sl. 152.

Bilješka. Bridovi, koji su u prostoru paralelni, imat će paralelne projekcije. Tako će biti $1''5'' \parallel 3''6''$; $1''4'' \parallel 2''6''$; $1'2' \parallel 4'6'$, i t. d. Kontura je oktaedra u π_1 pravilan šesterokut.

Zadaci za vježbu.

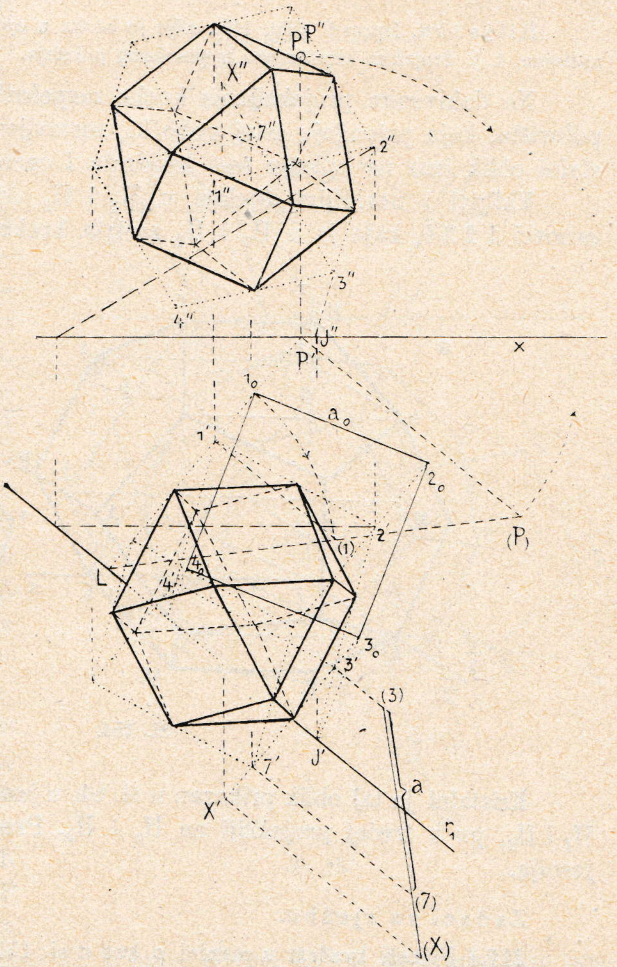
215.) Odredi sjene oktaedra u sl. 152. na Π_1 i Π_2 uz paralelne zrake svjetlosti.

216.) Postavi na svaku pobočku oktaedra pravilan tetraedar, kojemu je dotična pobočka osnovkom. Prikaži nastalo tijelo, pošto je oktaedar prije toga zaokrenut oko $p \perp \Pi_2$ u nov položaj. Odredi mrežu toga tijela.

64. Projekcije kocke i izvedenoga kristalnoga oblika. U ravnini ρ, kojoj je prvi trag r_1 (slika 153.), a drugi trag ide točkom P u Π_2, treba nacrtati kvadrat 1 2 3 4, koji će biti jedna pobočka kocke. Točkom će se P povući prva priklonica PL i preložiti oko prve projekcije $P'L$ u $(P)L$. Osnovni je kvadrat predočen u preložaju $1_0\ 2_0\ 3_0\ 4_0$ tako, da je 1_0 na $P'L$. Iz 1_0 dobit će se s pomoću priklonoga kuta $1_0\ L(P)$ ravnine ρ projekcija $1'$ poznatim načinom. Projekcija je $1''$ u ordinali, i to nad x za dužinu $1'$ (1).

Preložaj $1_0\ 4_0$ i projekcija $1'4'$ moraju se sjeći na tragu r_1; odatle izlazi projekcija $4'$ (gdje je $4'4_0 \perp r_1$), a istim se postupkom dobivaju projekcije $3'$ i $2'$. Upotrebi točku $J'J''$!

U vrhovima osnovnoga kvadrata 1, 2, 3, 4 uzdignut će se na ravninu ρ normale; njihove su prve projekcije normalne na r_1, druge na r_2. Za točku 2 određena je sutražnica drugoga traga, pa će zato normale na ρ u drugoj projekciji biti okomite na toj sutražnici.



Sl. 153.

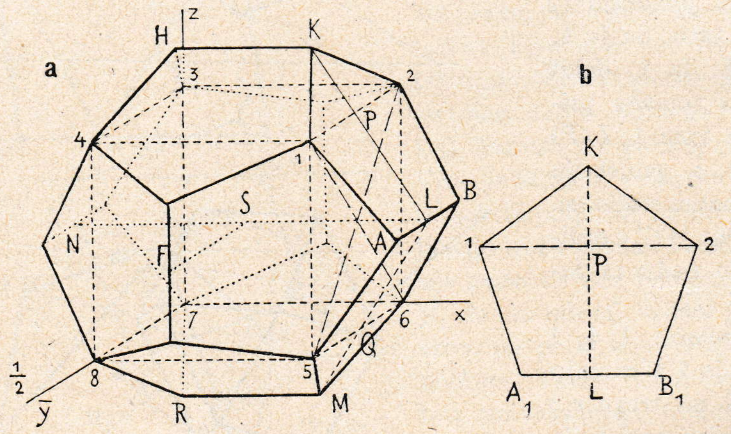
*

Na onoj normali, koja ide točkom 3, izabrana je po volji točka $X'X''$, pa je dužina $3X$ preložena oko $3'X'$ u (3) (X). Od točke (3) prenesena je na preložaj prava dužina a stranice osnovnoga kvadrata. Tako je određena točka (7) i iz nje izvedena prva projekcija $7'$, te druga projekcija $7''$ na normali točke 3. Točka je 7 vrh gornje pobočke kocke; ta se pobočka određuje u projekcijama tako, da se povuku paralele sa stranicama donje pobočke 1 2 3 4 u Π_1, dotično u Π_2.

B i l j e š k a. Isporedi sliku 149., gdje je kocka u općenom položaju prikazana drugim načinom, t. j. dvojakim okretanjem iz posebnog položaja.

Na dobivenim projekcijama kocke raspolovljeni su s v i bridovi, pa su polovišta, koja pripadaju istoj pobočki, sastavljena u kvadrate. Postali kristalni oblik ima na oplošju šest kvadrata i osam istostranih trokuta.

Vidljivi i nevidljivi dijelovi u Π_1 i Π_2 odredit će se prema donjoj osnovci 1 2 3 4, koja je u Π_1 i Π_2 zastrta kockom.



Sl. 154.

Kristalni je taj oblik prikazan u sl. 84. u jednostavnijem položaju prema Π_1 i Π_2, pa u trećoj projekciji na $\Pi_3 \perp \Pi_2$. Predodžba je oblika u slici 153. jasnija.

Z a d a c i z a v j e ž b u.

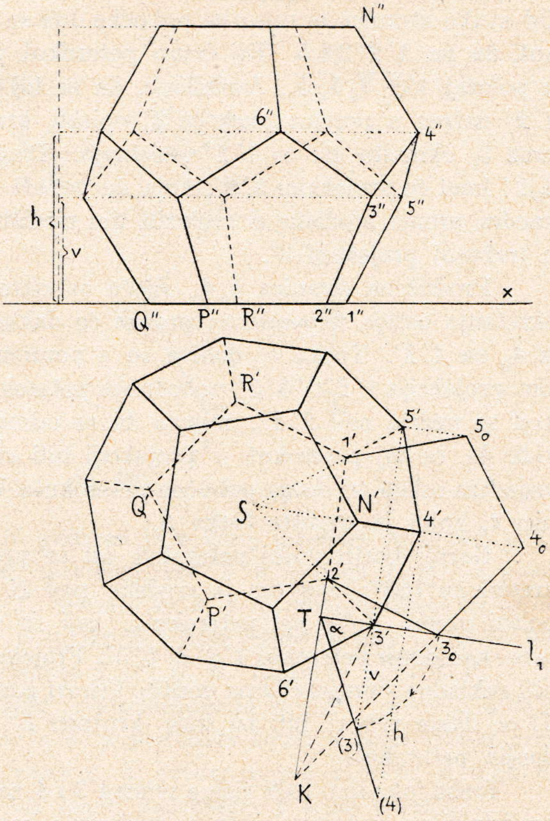
217.) Prikaži kvadrat u ravnini ρ kao u sl. 153., uzdigni u sredini kvadrata normalu na ρ i prenesi na obje strane od sredine polovinu dijagonale kvadrata. Dva dobivena vrha čine s vrhovima kvadrata pravilan oktaedar. Odredi sjene toga oktaedra na Π_1 i Π_2 za paralelnu rasvjetu.

218.) Odredi bačenu sjenu kocke u sl. 153. na ravninu ρ, ako zraka svjetlosti ima projekcije s' i s'' tako, da bude $\sphericalangle s'x = 45^0$, $\sphericalangle s''x = 45^0$.

219.) Predoči u projekcijama kocku, kojoj je jedna pobočka u ravnini σ (∞, 3, 4), i odredi sjenu te kocke na ravninu σ.

65. Kosa i ortogonalna projekcija pentagonalnoga dodekaedra. Dodekaedar ima 20 vrhova; među njima ima takovih skupova po 8 vrhova, koji su vrhovi kocke, upisani u dodekaedar (slika 154.) Nad svakom pobočkom kocke 1 2 3 4 5 6 7 8 uzdižu se dva pobočna pravilna peterokuta kao krov; bridovi su kocke njihove dijagonale. Pobočnih će peterokuta biti toliko, koliko kocka ima bridova, t. j. 12 (grč. dódeka).

1. Sastavit ćemo kosu sliku dodekaedra (prikrata $\frac{1}{2}$) s pomoću kose slike kocke 1 2 3 4 5 6 7 8. U sl. 154. b nacrtan je jedan pobočni peterokut u pravoj veličini. Položit ćemo prije svega jedan pobočni peterokut po bridu 1 2 kocke. U sredini kvadrata 1 2 6 5 kocke postavit ćemo normalu na ravninu toga kvadrata; normala ide poradi simetrije središtem S kocke. Na toj će normali biti nožište L visine KL pobočnoga peterokuta, a ta će ista visina prolaziti i sredinom P brida 1 2 kocke. Pravac je PL u prostoru paralelan s ravninom crtnje, pa se zato ne prikraćuje u kosoj projekciji. Na peterokutu ćemo dakle u sl. 154. b odmjeriti PL, iz točke P na bridu 1 2 presjeći s tom dužinom normalu SL u točki L, a onda povući LP i na produženje prenijeti PK u pravoj veličini. U točki ćemo L povući dalje paralelu s $\bar{y}$ i prenijeti $LA = LB$ tako, da poradi prikrate $\frac{1}{2}$ bude AB polovina od A_1B_1.



Sl. 155.

Sredinu Q na bridu 5 6 spojit ćemo s L i učiniti $LM = KL$. Tako je određen drugi pobočni peterokut $A 5 M 6 B$. Vrhom K povući ćemo paralelu

KH s bridom 1 4 kocke i na tu paralelu odmjeriti pravu dužinu stranice peterokuta $KH = A_1 B_1$, jer je brid KH paralelan s ravninom slike.

Točkom S povući ćemo opet paralelu s $\bar{y}$ i na nju poradi prikrate prenijeti $SF = \frac{1}{2} . SL$; tom točkom F ide vertikalno slika brida, koji se prikazuje u pravoj veličini ($= A_1 B_1$). Svi se ostali bridovi i vrhovi dodekaedra dobivaju sličnim postupkom, kako se razabira iz slike.

2. Da od pentagonalnoga dodekaedra odredimo obje normalne projekcije, položit ćemo ga pobočkom $1' 2' P' Q' R'$ na ravninu Π_1 (slika 155.). Od svake stranice te osnovne pobočke diže se u vis po jedan pobočni peterokut, na pr. $1' 2' 3 4 5$. Taj ćemo peterokut preložiti oko $1' 2'$ u Π_1, dakle u položaj $1' 2' 3_0 4_0 5_0$. Zamislimo, da se taj preloženi peterokut okreće oko $1' 2'$ natrag u prostor; vrh će 3_0 opisati kružni luk u ravnini λ, koja ide kroz 3_0 okomito na os $1' 2'$ okretanja. Trag je te ravnine $l_1 \perp 1' 2'$. Brid $3_0 2'$ imat će projekciju $3' 2'$, koja će poradi simetrije cijele projekcije dodekaedra prema središtu S prolaziti tim središtem. Pravac $S2'$ siječe dakle l_1 u traženoj projekciji $3'$.

Produžena stranica $3_0 4_0$ siječe os okretanja $1' 2'$ u točki K, koja za okretanja ostaje nepomična; pravac će dakle $K3'$ dati točku $4'$ na normali iz 4_0 na $1' 2'$. Točka $5'$ dobiva se s pomoću $3'$, jer je $3' 5' \parallel 1' 2'$, pa je tim projekcija $1' 2' 3' 4' 5'$ pobočnoga peterokuta određena. Drugi peterokut, koji se uzdiže nad $2' P'$, mogao bi se odrediti istim načinom; no lako se vidi, da će taj peterokut u projekciji biti sukladan s $1' 2' 3' 4' 5'$, a isto vrijedi za ostala tri donja pobočna peterokuta. Vrhovi $4'$, $6'$, ... bit će na kružnici k, kojoj je središte točka S.

Gornji horizontalni peterokut bit će prema donjem $1' 2' P' Q' R'$ zakrenut za 180^0; njegovo je središte nad S. Od toga gornjega peterokuta polazi prema dolje pet peterokuta, koji su prema Π_1 priklonjeni jednako tako, kao donji peterokut $1' 2' 3' 4' 5'$. Projekcije će gornjih peterokuta na Π_1 biti sukladne s projekcijama donjih. Vrhovi gornjih peterokuta bit će $5'$, $3'$, ... Ti će dakle vrhovi biti na istoj kružnici k, koja ide vrhovima $4'$, $6'$, ... donjih peterokuta.

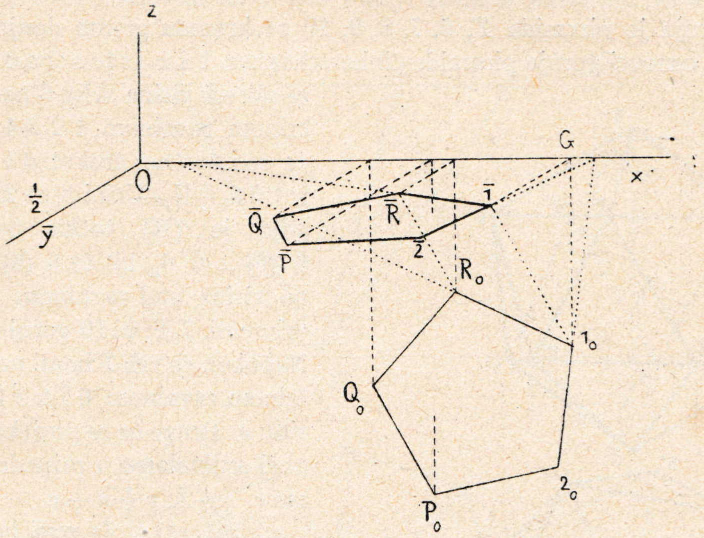
Treba još samo naći visine vrhova 3 i 4 nad Π_1. Peterokut ćemo 1 2 3 4 5 projicirati na ravninu λ; on se prikazuje kao pružac $T(4)$. Postavi li se u $3'$ normala na l_1, pa se na toj normali odredi točka (3) tako, da bude $T(3) = T3_0$, bit će $l_1 T(3)$ prikloni kut α, koji ravnina peterokuta 1 2 3 4 5 čini s Π_1. Pružac je $3'(3)$ visina v točke 3 nad Π_1. Postavi li se u $4'$ normala na l_1, dobit će se na $T(3)$ točka (4), pa će daljina točke (4) od l_1 biti visina h vrha 4 nad Π_1. Pet će vrhova 5, 3, ... imati nad Π_1 visinu v, a pet vrhova 4, 6, ... visinu h. Visina gornjega horizontalnoga peterokuta ima nad Π_1 visinu $v + h$. Ordinalama će se odrediti druge projekcije za vrhove u pripadnim visinama v, h i $v + h$.

Zadaci za vježbu.

220.) Prikaži ortogonalne projekcije dodekaedra za onaj položaj, koji ima u kosoj projekciji u sl. 154. Odredi mrežu dodekaedra.

221.) Odredi sjene dodekaedra u sl. 155. na Π_1 i Π_2.

222.) Predoči dodekaedar u kosoj projekciji za onaj položaj, koji ima u sl. 155.



Sl. 156.

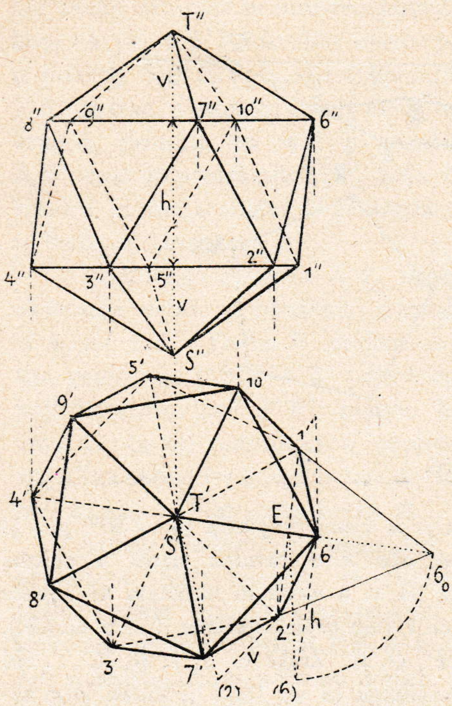
Osnovni peterokut $12PQR$ prikazan je u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$) u slici 156. Taj je peterokut zaokrenut oko x u ravninu crtnje u položaj $1_0\,2_0\,P_0\,Q_0\,R_0$. Postavi li se u 1_0 normala na x, a njezinim nožištem G povuče paralela s $\bar{y}$ i prenese $G\bar{1} = \frac{1}{2}.\ G\,1_0$, bit će $\bar{1}$ kosa projekcija vrha 1 (isp. sl. 69.). Tako će se isto dobiti kose projekcije $\bar{2}$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$. Zrake će $1_0\,\bar{1}$, $R_0\bar{R}$, . . . biti sve paralelne. Napokon će se cijela prva projekcija (u sl. 155.) prikazati istim načinom u kosoj projekciji, a onda će se u pojedinim kosim slikama vrhova postaviti vertikale i na njih prenijeti visine v, h, dotično $v + h$ u pravoj veličini. Sve će krajne točke na vertikalama biti vrhovi dodekaedra u kosoj projekciji.

Može se postupati i tako, da se nacrta 2. projekcija dodekaedra u ravnini $x\,z$ u pravoj veličini, kroz svaki pojedini vrh povuče paralela s $\bar{y}$ i na svaku paralelu prenese $\frac{1}{2}$ daljine pripadnoga vrha od Π_2.

66. Projekcije ikozaedra. Ikozaedar ima 20 (grč. ikosi) pobočnih istostranih sukladnih trokuta. Pet trokuta čini donju piramidu s vrhom S i osnovkom 1 2 3 4 5, pet trokuta gornju piramidu s vrhom T i osnovkom 6 7 8 9 10, a među obje piramide namjestio se pojas od 10 trokuta, koji imaju svoje osnovke izmjenice na donjoj i gornjoj piramidi (gl. sliku 157.).

U prvoj projekciji nacrtat će se najprije donja piramida S, 1, 2, 3, 4, 5; osnovka je 1 2 3 4 5 pravilan peterokut. Budući da je trokut S 12 u prostoru istostran, moći će se odrediti visina točke 1 (ili 2) nad Π_1. Točka će se 2 preložiti oko $S'2'$ u (2) na Π_1 tako, da bude $S'(2)$ stranica pobočnoga trokuta, t. j. $1\,2 = 1'2'$. Visina vrhova 1, 2, 3, 4 i 5 nad Π_1 bit će dakle $2'(2) = v$.

Gornja je piramida T, 6, 7, 8, 9, 10 zaokrenuta prema donjoj za 180°. Vrh 6 na osnovci gornje piramide čini s vrhovima 1 i 2 istostran trokut. Da se odredi visina vrha 6 nad horizontalnom ravninom 1 2 3 4 5, preložit će se istostran trokut 6 1 2 oko 1 2 u $1\,2\,6_0 \parallel \Pi_1$. Učini li se $E6_0 = E(6)$, gdje je (6) točka na normali $6'(6) \perp 6'6_0$, bit će $6\,(6) = h$ tražena visina nad ravninom 12345 za vrhove 6, 7, 8, 9 i 10 gornje piramide. Napokon će vrh T imati nad horizontalnom ravninom 6 7 8 9 10 opet visinu v. Druge će se projekcije vrhova naći ordinalama u pripadnim visinama v, $v + h$, $v + h + v$.



Sl. 157.

Bilješka. Za svaki brid ikozaedra ima drugi brid, koji je prvomu paralelan; tako je na pr. $S5 \parallel T7$; $26 \parallel 49$ i t. d. u prvoj i posebno u drugoj projekciji.

Zadaci za vježbu.

223.) Odredi bačene sjene ikozaedra u sl. 157. na Π_1 i Π_2.

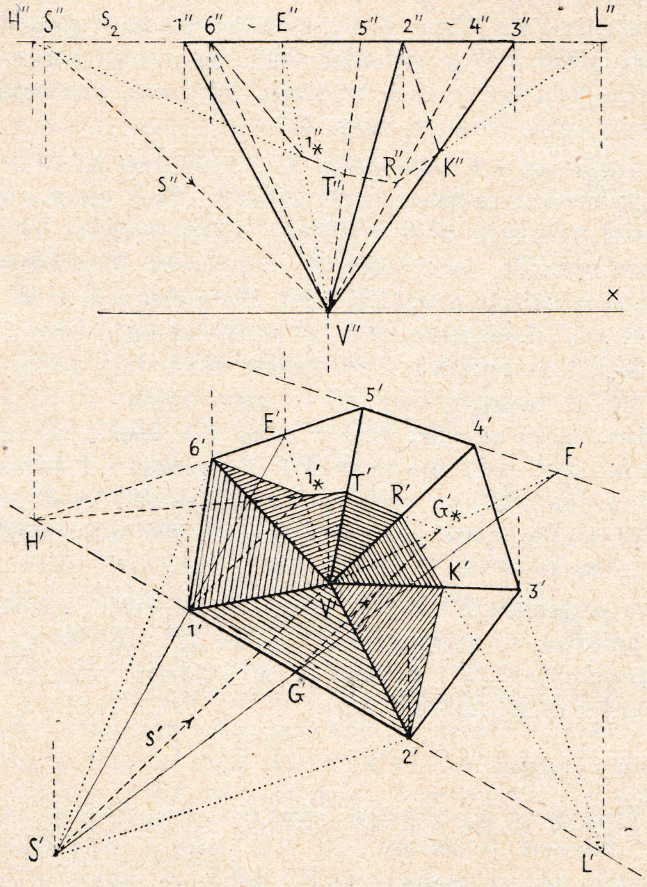
224.) Prikaži ikozaedar u kosoj projekciji postupkom istumačenim u sl. 156. Isti je postupak upotrebljen i u sl. 164. kod kružnice.

67. Bačena sjena u nutarnjost nepravilne piramide. U slici 158. prikazane su projekcije nepravilne šesterostrane piramide, kojoj je vrh V u Π_1, a osnovka 1 2 3 4 5 6 u ravnini $\sigma \parallel \Pi_1$. Za zadani smjer zrakâ svjetlosti s', s'' treba odrediti sjenu u nutarnjost piramide.

Položit ćemo zraku svjetlosti vrhom V piramide i potražiti probodište S', S'' te zrake s ravninom osnovke σ. Projekcija S'' bit će dakle na tragu s_2 ravnine σ, a S' je u ordinali na s'. Ako S' spojimo sa svim vrhovima 1', 2', 3', 4', 5', 6' osnovke u prvoj projekciji, opazit ćemo, da su spojnice $S'6'$ i $S'2'$ najdalje udaljene na jednoj i drugoj strani (ostale su spojnice

među tim dvjema). Pobočke će dakle $V16$ i $V12$ biti izvana osvijetljene, a ostale su četiri pobočke u tami. Sjena u nutarnjost piramide polazit će od 2 i 6 pa će činiti slomljenu crtu $2KRT1_*6$. Ta je slomljena crta sjena bridova 1 2 i 6 1 na četirma pobočkama $V32$, $V43$, $V54$ i $V65$.

Potražit ćemo najprije sjenu vrha 1 u nutarnjost piramide. Vrhom 1 i zrakom s položit ćemo ravninu $1SV$; ta je ravnina paralelna sa smjerom



Sl. 158.

zrakâ svjetlosti, jer sadržava zraku $s \equiv SV$. Trag te ravnine na ravnini osnovke σ bit će pravac $S1$; njegova prva projekcija $S'1'$ siječe osnovku po drugi put u E' na $6'5'$. Spojnica $E'V'$ nije dakle drugo nego prva projekcija one izvodnice na piramidi, u koju pada sjena brida $1V$. Položimo li još zraku svjetlosti kroz 1, dobit ćemo na $E'V'$ prvu projekciju $1'_*$ sjene

za vrh 1 na piramidu. Sjena je dakle brida 6 1 piramide u prvoj projekciji pružac $6' 1'_*$. Druga je projekcija za sjenu točke 1 na $E'' V''$ u $1''_*$.

Slomljena crta sjene od 1_* do 2 bit će sjena brida 1 2 u nutarnjost piramide. Zamislimo, da je tim bridom 1 2 položena ravnina svjetlosti (t. j. ona, koja je paralelna sa zadanim smjerom svjetlosti); ta ravnina, dalje ravnina osnovke σ i ravnina pobočke $V 6 5$ morat će se sjeći u točki H, kojoj je prva projekcija H' na $1'2'$ i na $5'6'$. Spojimo li H' s $1'_*$ pa taj pravac produžimo do T' na $V' 5'$, dobit ćemo komad sjene $1'_* T'$, koju baca jedan dio brida 1 2 na pobočku $V 6 5$. Pravac je naime $H T$ presječnica ravnine $V 6 5$ s ravninom svjetlosti, koju smo položili bridom 1 2. U točki T lomit će se sjena na bridu $V 5$.

Uzmimo dalje na 1 2 neku točku G i položimo opet ravninu svjetlosti $S G V$ (ta ravnina sadržava zraku $s \equiv SV$). Trag ravnine svjetlosti na σ bit će u prvoj projekciji $S' G'$; taj trag siječe osnovku 5 4 piramide u točki F. Prema tome će sjena točke G na pobočku $V 5 4$ biti svakako na pravcu $V F$, koji je sadržan u pobočki $V 5 4$. Povučemo li kroz G' zraku svjetlosti paralelnu sa s', dobit ćemo na $V' F'$ prvu projekciju sjene G'_* točke G. Od sjene brida 1 2 na pobočku $V 5 4$ imamo dakle dvije točke T' i G'_* u prvoj projekciji; na pobočki $V 5 4$ bit će samo komad $T' R'$ od te sjene $T' G'_*$ sadržan. Sjena se opet lomi u R na $V 4$. Kao i za komad $1_* T$ sjene naći ćemo opet dalji dio sjene $R K$ na pobočku $V 4 3$, ako produžimo $4' 3'$ do L' na $1' 2'$, pa onda spojimo L' sa R'. Na $V' 3'$ dobivamo točku K', u kojoj se sjena lomi. Napokon će $K 2$ biti ostali dio sjene brida 1 2 na pobočku $V 3 2$.

Druge su projekcije T'', R'', K'' sjene na dotičnim bridovima u ordinalama. Za kontrolu se mogu potražiti točke H'' i L'' na s_2; njima idu opet druge projekcije $1''_* T''$, dotično $R'' K''$ dijelova sjene, kao što $1'_* T'$ i $R' K'$ idu točkama H', dotično L'.

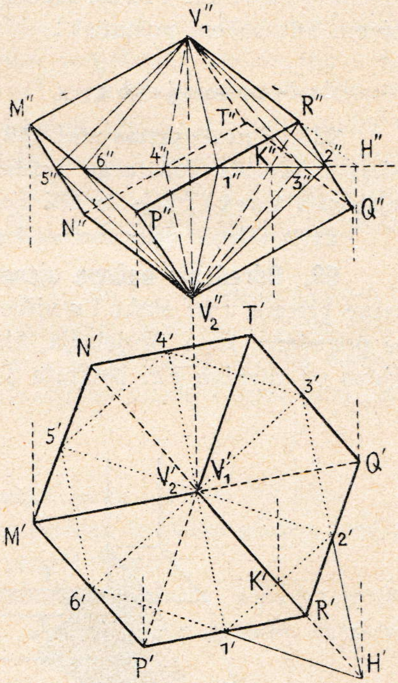
Zadaci za vježbu.

225.) Odredi sjenu u nutarnjost uspravne peterostrane prizme, kojoj je osnovka u Π_1. Postupak je isti kao u sl. 158., samo će ovdje ravnine svjetlosti za pobočne bridove biti sve normalne na Π_1; njihovi će tragovi na ravnini gornje osnovke biti paralelni sa smjerom s'. Slomljena crta sjene vidjet će se u Π_2, u Π_1 pada ta crta u osnovku prizme.

226.) Naznači one točke na bridu 1 2 u sl. 158., koje bacaju svoje sjene u T, R i K na $V 5$, $V 4$ i $V 3$.

227.) Odredi bačenu sjenu piramide u sl. 158. na Π_1 i pokaži, kako bi se s pomoću te sjene mogla odrediti prva projekcija slomljene crte $6\ 1_* T R K 2$. Isp. postupak u § **46**.

68. Projekcije romboedra. U slici 159. prikazane su projekcije romboedra, t. j. tijela, koje je omeđeno sa šest sukladnih romba. U kristalografiji se uzima, da romboedar postaje od dvije upravne jednake šesterostrane piramide, koje imaju pravilan šesterokut 1 2 3 4 5 6 kao zajedničku osnovku; vrh je gornje piramide u V_1, vrh donje piramide u V_2. Dužina $V_1 V_2$ uzeta je po volji. Dvije pobočke gornje piramide, koje nijesu susjedne nego rastavljene jednom pobočkom, na pr. V_1 6 1 i V_1 2 3, pa jedna pobočka donje piramide, koja je među obadvije pobočke gornje piramide, dakle ovdje V_2 1 2, sijeku se u točki R, koja je jedan vrh romboedra. U kristalografiji se kaže, da pobočke V_1 6 1, V_1 2 3 i V_2 1 2 rastu, dok dospiju do zajedničkoga sjecišta R. Obadvije su točke V_1 i V_2 također vrhovi romboedra.



Sl. 159.

U slici 159. produžene su prve projekcije stranicâ 6 1 i 3 2, koje se sijeku u H'. Pravac je dakle $V'_1 H'$, $V''_1 H''$ (H je na ravnini šesterokuta) presječnica izabranih dviju nesusjednih pobočaka gornje piramide. Pravac $V_2 K$ donje pobočke V_2 1 2, kojemu je druga projekcija $V''_2 K''$, sjeći će $V''_1 H''$ u R'', a R' će biti na $V'_2 H'$. Poradi simetrije piramidâ prema râvnini $V_1 V_2 K$ bit će R zajednička točka triju pobočaka, koje su gore istaknute. Oba brida, koja izlaze iz vrha R, jesu $R1$ i $R2$. Povuče li se $V_2 P \parallel R2$ i $V_2 Q \parallel R1$, dobit će se jedna pobočka $R P V_2 Q$ romboedra, a ostale izlaze s pomoću paralelâ s bridovima prve dobivene pobočke. Svakim vrhom šesterokuta 1 2 3 4 5 6 ide po jedan brid romboedra.

Poradi simetrije piramidâ prema ravnini zajedničke njihove osnovke bit će tri vrha romboedra R, M, T jednako visoki nad tom ravninom, a vrhovi P, Q, N u jednakoj udaljenosti pod istom ravninom. Budući da je $V_2 P \#\!\!= QR \#\!\!= T V_1$, vidi se, da ravnina vrhova R, M, T i ravnina vrhova P, Q, N dijele visinu $V_1 V_2$ u tri jednaka dijela. Prva projekcija romboedra ostaje ista, ako se i mijenja visina $V_1 V_2$. Točke naime K' i H' ne mijenjaju kod toga svoga položaja, a točka će se R'' pomicati na ordinali $R' R''$. Zašto? Uzmi u obzir, da je $V'_1 K' = K' H'$, a slično je tako i u drugoj projekciji!

*

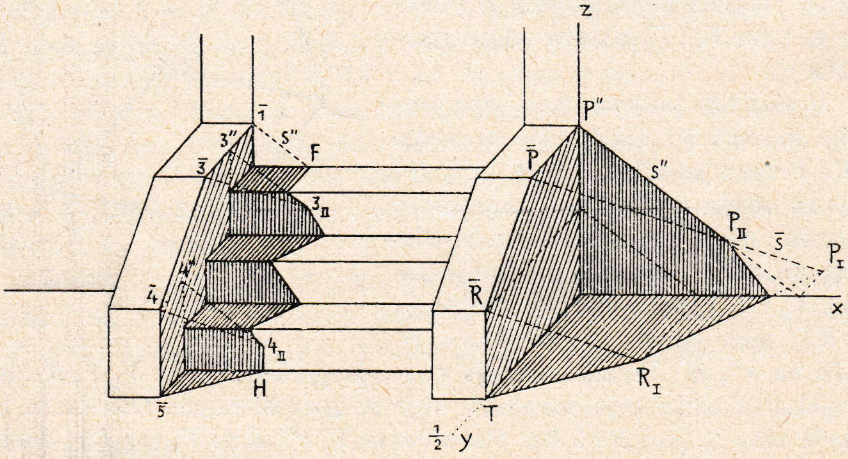
Dijagonala jedne pobočke romboedra, na pr. MR, koja je paralelna s Π_1, pa se zato prikazuje u pravoj veličini, ostaje ista za sve romboedre, koji postaju mijenjanjem visine $V_1 V_2$. Među tim romboedrima sadržana je kocka. Priredi model romboedra s pomoću mreže i promotri na njemu istumačeni postupak!

Zadaci za vježbu.

228.) Prikaži prema slici 159., kad će od romboedra postati kocka (heksaedar). Dijagonala pobočnoga kvadrata mora biti $MR \parallel \Pi_1$, a odatle treba naći dijagonalu kocke, koja će biti ujedno visina $V_1 V_2$ za taj osobiti romboedar.

229.) Odredi sjene romboedra u sl. 159. na Π_1 i Π_2.

69. Određenje bačene sjene složenoga tijela. U slici 160. složene su same prizme u tri stube i u njihovu ogradu; iz slike se razabira jasno, kako je priređena kosa projekcija tih stubâ i ograde. Predmet je smješten na lijevo od ravnine yz; prikrata $\frac{1}{2}$.



Sl. 160.

Točkom P, koja ima kosu projekciju $\overline{P}$, a drugu normalnu projekciju P na ravnini xz, ide zraka svjetlosti, kojoj je druga projekcija s'', a kosa njezina projekcija $\overline{s}$. Za točku P sijeku se obje te projekcije u P_{II} na xz. Sjena P_I točke P na xy dobila bi se poznatim načinom kao probodište zrake svjetlosti kroz P s prvom ravninom projekcijâ (gl. § **44.**, 5.). Istim će se načinom dobiti prava sjena R_I točke R na xy s pomoću druge projekcije te točke (na osi y). Sjena $R_I P_I$ lomi se na osi x, pa odatle kreće prema sjeni P_{II}. Vertikalan pravac TR baca sjenu u pružac TR_I.

Brid 1 3 ograde, koji je koso prikazan pruščem $\overline{1}\,\overline{3}$, bacit će sjenu na najgornju stubu, pa će ta sjena biti paralelna s 1 3; povuče li se kroz $\overline{1}$ druga projekcija zrake svjetlosti s'', dobit će se na bridu najgornje stube točka F, kojom će prolaziti komad sjene paralelno s 1 3.

Vrh 3 ima na prednjoj vertikalnoj stijeni najgornje stube projekciju 3''; na toj će stijeni, kao na drugoj ravnini projekcijâ, nastati sjena 3_{II} točke 3 u presjeku zrake $\overline{s}$ kroz $\overline{3}$ i zrake s'' kroz 3'' poznatim načinom.

Točka 4 projicira se na prednju vertikalnu stijenu najdonje stube u 4''; povuče li se $\overline{s}$ kroz $\overline{4}$ i s'' kroz 4'', dobit će se u presjeku tih pravaca sjena 4_{II} točke 4 na pomenutu vertikalnu stijenu. Pružac 4 5 baca sjenu na istu tu stijenu u vertikalan pružac $4_{II}\,H$ i u komad $\overline{5}\,H$, koji je paralelan s $T\,R_{I}$.

Brid 3 4 baca sjenu u slomljenu crtu od 3_{II} do 4_{II}. Pojedini komadi te slomljene crte naći će se tako, da se istumačenim načinom odrede sjene za nekoliko točaka brida 3 4 na vertikalne i horizontalne stijene donje i srednje stube. Komadi te sjene na paralelne stijene bit će i sami paralelni.

Zadaci za vježbu.

230.) Prikaži sliku 160. u normalnim projekcijama i odredi sve sjene.

231.) Odredi projekcije i mrežu uspravne pravilne trostrane prizme, kojoj je osnovka u ravnini ρ (—3, 5, 4), a visina je prizme $v = 5{\cdot}5$.

232.) Prikaži u projekcijama uspravnu kvadratičnu piramidu, kojoj je osnovka sa stranicom $a = 3$ u ravnini ρ (2, —1, 3), a visina joj je jednaka dijagonali osnovke. Odredi mrežu piramide.

233.) Odredi projekcije kose trostrane prizme, kojoj je jedan pobočni paralelogram u ravnini σ (—3, 4, 5), i sjene te prizme na Π_1 i Π_2.

234.) Uzmi u ravnini τ (5, ∞, 4) nepravilan četverokut kao osnovku uspravne prizme. Odredi obje projekcije te prizme i produži prizmu, dok siječe ravninu Π_1.

235.) Prikaži projekcije uspravne piramide, kojoj je jedan brid kvadratske osnovke u osi x, a vrh u Π_1. Upotrebi pobočnu projekciju Π_3.

236.) Zadana je pravilna šesterostrana piramida, kojoj je osnovka u Π_2, i ravnina σ (2, 4, 6), kojoj trag s_2 ne siječe osnovku piramide. Okreni piramidu oko traga s_2, dok joj osnovka dođe u σ, i prikaži projekcije za taj položaj.

237.) Prebaci kosu četverostranu prizmu, kojoj je osnovka u Π_1, oko jednoga brida osnovke tako, da pripadna pobočka dođe u Π_1. Odredi sjene te prizme za novi položaj.

238.) Predoči u kosoj projekciji kosu četverostranu prizmu, kojoj je osnovka u xz, i izaberi smjer zrakâ svjetlosti tako, da jedan dio sjene te prizme padne i na ravninu xy.

239.) Nađi projekcije trostrane piramide, kojoj je osnovka u Π_1, i od koje su zadane dužine svih šest bridova. Nacrtaj najprije osnovku, a onda odredi preložaje pobočaka i zaokreni pobočke u prostor. Konstruirana je dakle najprije mreža!

240.) Prikaži uspravnu četverostranu prizmu, kojoj je osnovka u ravnini τ (—2, ∞, 5), a visina joj je $v = 4$. Odredi sjene te prizme na ravninu osnovke.

241.) Okreni oktaedar u sl. 152. oko pravca $p \perp \Pi_2$ (p'' ima nad x visinu 3) za 120^0 i odredi sjene oktaedra za novi položaj.

242.) Prikaži projekcije oktaedra, kojemu je jedna pobočka u ravnini σ (∞, 3, 4). Isp. sl. 152.

243.) Odredi projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj je vrh točka V (3, 6, 6), a osnovka je paralelna s ravninom σ (∞, 2, 1) i na protivnoj strani te ravnine negoli os x, i to u udaljenosti $d = 2$.

244.) Osnovka je kvadratične uspravne piramide u ravnini τ (∞, 2, 2), a vrh V piramide u osi x. Odredi sjene te piramide na Π_1 i Π_2.

245.) Prikaži u ortogonalnoj projekciji tetraedar u sl. 71. i odredi njegove sjene na zadanu ravninu ρ.

246.) Prikaži treću projekciju dodekaedra za onaj položaj, koji ima sl. 155., i to na ravninu $\Pi_3 \perp \Pi_2$, $\sphericalangle_2 x_3 x = 60^0$.

257.) Odredi treću projekciju ikozaedra za položaj u sl. 157. na ravninu $\Pi_3 \perp \Pi_2$, $\sphericalangle_2 x_3 x = 45^0$.

248.) Prikaži romboedar u sl. 159. u trećoj projekciji, $\Pi_3 \perp \Pi_1$ ili $\Pi_3 \perp \Pi_2$.

249.) Odredi projekcije rombičkoga dodekaedra u sl. 74. tako, da mu os VS bude normalna na ravnini σ (3, 5, 6), a središte S u ravnini σ.

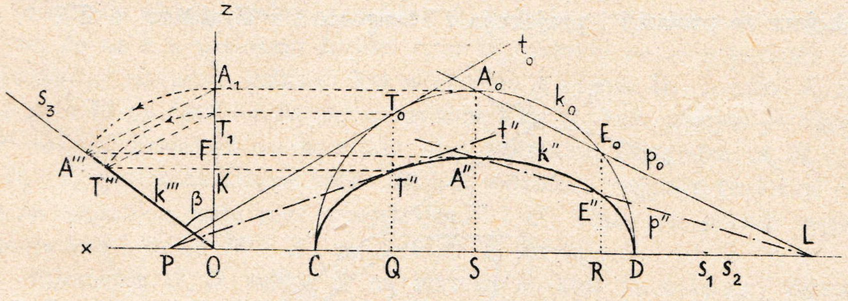
Drugi odsjek.

Kružnica i oble tračne površine.

I. Projekcije i sjene kružnice.

70. Elipsa kao normalna projekcija kružnice. U ravnini σ, koja prolazi osju x, i koja s Π_2 zatvara kut β (slika 261.), položena je kružnica k, kojoj je središte S na osi x. Od gornje polovine te kružnice treba nacrtati normalnu projekciju na Π_2. Ravnina σ ima oba traga s_1 i s_2 u osi x, a treći trag s_3 na Π_3, t. j. na pobočnoj ravnini, čini s osi z kut β.

Zamislit ćemo, da je kružnica k okrenuta oko x u ravninu Π_2 u položaj k_0. Najvišu točku A_0 na k_0 okrenut ćemo natrag u ravninu σ tako, da povučemo $A_0 A_1 \parallel x$ do osi z, pa onda učinimo $OA_1 = OA'''$, gdje je A''' na s_3. Točka je A''' projekcija točke A na pobočnu ravninu Π_3; druga je



Sl. 161.

projekcija A'' na ordinali točke A_0, a ujedno je $A''' A'' \parallel x$. Najviša točka A kružnice k imat će svoju drugu projekciju u A'', a to će opet biti najviša točka u drugoj projekciji k'' kružnice. Točke C i D, u kojima k_0 siječe os okretanja x, ostaju nepomične; njima će dakle opet prolaziti projekcija k''. Kako je $SA_0 = OA_1 = OA'''$, bit će OA''' na s_3 treća projekcija gornje polovine kružnice k. Posve istim načinom kao A'' dobit će se i T'' za neku točku T_0 na k_0. Povući će se $T_0 T_1$, iz O opisati luk $T_1 T'''$ i povući $T''' T'' \parallel x$.

Iz slike izlazi, da su trokuti OFA''' i OKT''' slični; imamo dakle ove odnose:

$$OA''' : OT''' = OF : OK,$$

a kako je $OA''' = SA_0$, $OT''' = QT_0$ i $OF = SA''$, $OK = QT''$, prelazi taj razmjer u ovaj:

$$SA_0 : QT_0 = SA'' : QT''$$

ili

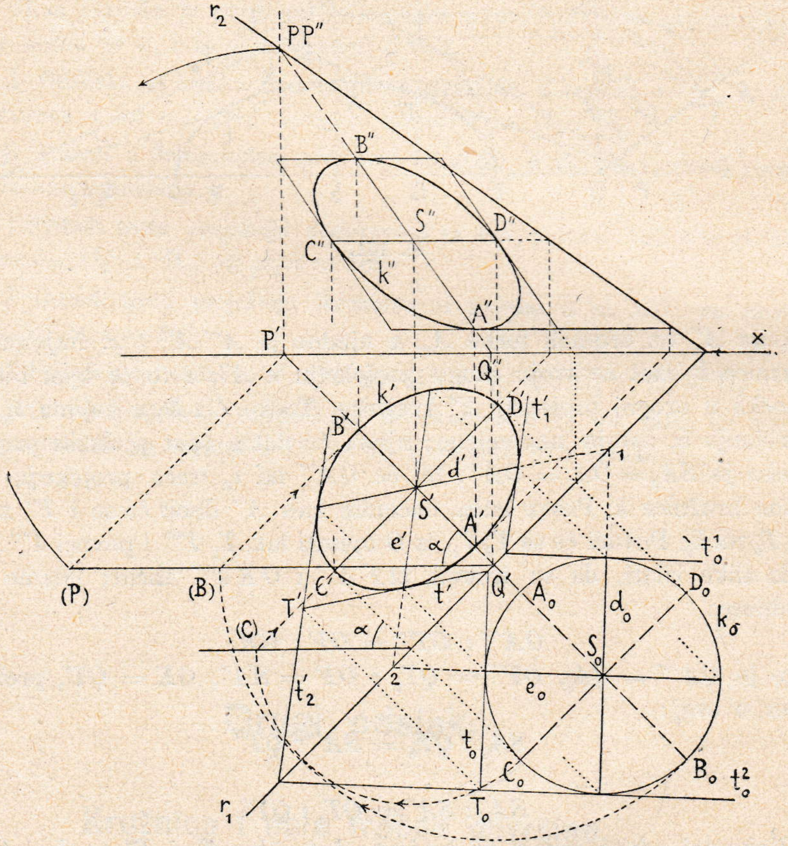
$$SA_0 : SA'' = QT_0 : QT''.$$

Kako taj odnos vrijedi za k o j u g o d t o č k u T_0 i T'' na k_0 i k'', vidi se, da projekcija k'' siječe sve ordinale SA_0, QT_0, RE_0, . . . kružnice k_0 u točkama A'', T'', E'', . . . tako, da je o m j e r za svaku ordinalu kružnice k_0 i za pripadnu ordinalu projekcije k'' i s t i, t. j. jednak omjeru polumjera SA_0 prema projekciji SA'' toga polumjera.

Spoji li se na pr. A_0 s kojomgod točkom E_0 na k_0 i odredi sjecište L toga pravca s osi x, prolazit će točkom L i spojnica projekcijâ A'' i E'' onih točaka, jer su omjeri $SA_0 : SA''$ i $RE_0 : RE''$ na paralelnim ordinalama jednaki. S pomoću točke L može se dakle svagda naći E'' za E_0.

Isto izlazi i drugim načinom, ako uzmemo, da je A_0E_0 preložaj p_0 neke tetive p kružnice k; $A''E''$ bit će projekcija p'' te tetive. No točka L, u kojoj tetiva siječe os okretanja x, ostaje nepomična, pa će njom prolaziti i projekcija p'' tetive.

Tako će isto tangenta t_0 kružnice k_0 u T_0 sjeći os okretanja x u točki P, kojom će prolaziti i projekcija t'' tangente t s diralištem u T''.



Sl. 162.

Projekcija je k'' zatvorena krivulja kao i kružnica k. Svaki pravac p_0, koji k_0 siječe u dvije točke A_0 i E_0, imat će projekciju p'', koja će krivulju k'' sjeći u dvije točke A'' i E''. Projekcija je dakle k'' zatvorena krivulja 2. reda, pa već iz tih oznaka možemo zaključiti, da je elipsa.

Bilješka. Da je normalna projekcija kružnice zaista uvijek elipsa, pokazat ćemo kasnije (§ 136.) još točnije.

Budući da je projekcija k'' simetrična prema osi x i prema pravcu SA_0, vidi se, da je CD velika os elipse k'', a SA'' njezina mala poluos. Prikazani će odnosi ostati posve isti, ako u ravnini σ pomaknemo kružnicu k iz položaja u sl. 161. na drugo koje mjesto. Tim će se samo projekcija k'' pomaknuti paralelno u nov položaj.

71. Projekcije kružnice, koja je u zadanoj ravnini u općenom položaju. Da se odrede obje projekcije kružnice k, koja je u ravnini ρ (slika 162.), nacrtat će se k u preložaju k_0 oko r_1 u Π_1, odredit će se s pomoću točke P poznatim načinom prikloni kut α ravnine ρ prema Π_1, i onda k_0 okrenuti za α ili za $180^0-\alpha$ natrag u ravninu ρ (u sl. 162. učinjen je okret za $180^0-\alpha$). U preložaju su nacrtana oba normalna dijametra $A_0B_0 \perp r_1$ i $C_0D_0 \parallel r_1$, pa su za krajne točke B_0 i C_0 određeni najprije preložaji (B) i (C) na stranu, a onda prve projekcije B' i C'. Time su poradi simetrije poznate već i točke D' i A', pa središte S' krivulje k'.

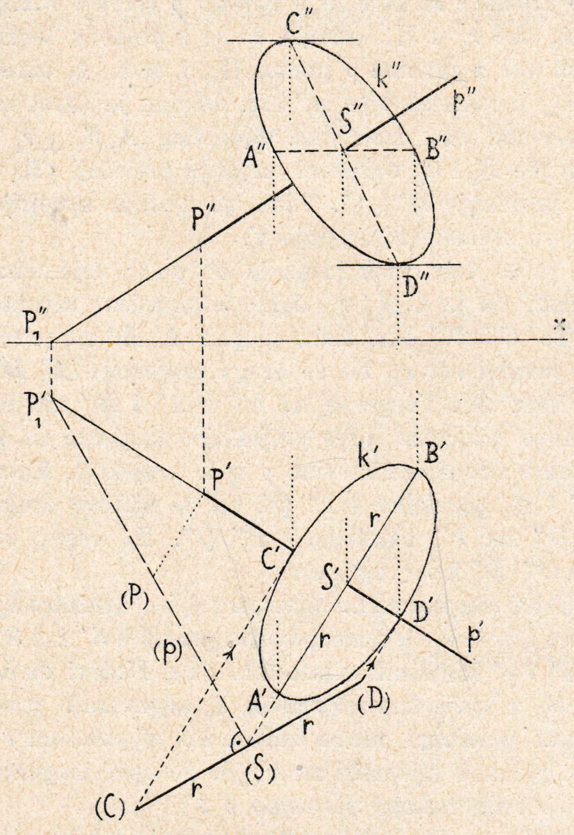
Dijametar C' D' velika je os krivulje k', koja je elipsa; dijametar je A' B' mala os za k'. Budući da je $C D \parallel r_1$, dakle sutražnica ravnine ρ, koja ide točkom S, bit će C'' $D'' \parallel x$. Kako je pak A' B' na prvoj projekciji P' Q' priklonice u ravnini ρ za r_1, bit će druga projekcija A'' B'', na pravcu P'' Q'', koji ide kroz S''. Tangente na k'' u A'' i B'' bit će paralelne s osi x, jer su njihove pripadne prve projekcije, tangente na k u A' i B', paralelne s r_1, dakle sutražnice ravnine ρ u 1. projekciji. Kako su pak tangente na k' u C' i D' paralelne s P' Q', bit će njihove druge projekcije tangente u C'' i D'' na k'' paralelne s P'' Q''. Za elipsu su dakle k'' dijametri A'' B'' i C'' D'' konjugirani.

U preložaju su nacrtana još dva normalna dijametra d_0 i e_0 kružnice k_0. Produže li se ti dijametri do 1 i 2 na r_1, a onda povuku pravci $1\,S'$ i $2\,S'$, dobit će se prve projekcije d' i e' izabranih dijametara d i e. Budući da će paralelnim tangentama t^1_0 i t^2_0 u krajevima dijametra d_0 odgovarati prve projekcije t'_1 i t'_2, koje su opet paralelne među sobom i s dijametrom e', vidi se, da su d' i e' konjugirani dijametri za k', jer će opet tangente u krajevima dijametra e' biti s istih razloga paralelne s d'.

Kojigod par normalnih premjera neke kružnice k projicira se normalnom projekcijom u konjugirani par dijametara za eliptičku projekciju k' (ili k'') kružnice k.

72. Projekcije kružnice, koja ispunjava zadane uvjete. U slici 163. razriješena je ova zadaća: Zadan je pravac p', p''; neka se odrede projekcije kružnice k, kojoj je središte S na p, kojoj je ravnina normalna na p, i koja ima zadan polumjer r. U rješenju bi se moglo postupati tako, da se u točki S postavi ravnina $\rho \perp p$, da se oko traga r_1 (ili r_2) preloži k u dotičnu ravninu projekcijâ, pa se napokon izvedu obje projekcije k' i k'' kao u sl. 162.

Jednostavnije se mogu obje projekcije za k dobiti ovako. Svi dijametri kruga k u prostoru bit će pravci normalni na p u točki S (gl. § **5.**, *1*). Od svih tih dijametara bit će jedan usporedan s Π_1; to je dijametar $AB \parallel \Pi_1$, gdje se na $A'\,B'$ u pravoj veličini vidi njegova dužina $2r$. Druga će projekcija $A''\,B''$ toga dijametra ići kroz S'', pa će biti $A''\,B'' \parallel x$. U prvoj projekciji treba još odrediti onaj dijametar $C\,D$, koji je u prostoru normalan na AB i na p. Preložit ćemo pravac p u (p), kod čega će se upotrebiti točka S i kojakod točka P na p, ili prvo probodište P_1 pravca p. Budući da je $CD \perp p$, povući će se u preložaju $(C)(D) \perp (p)$ i učiniti $(C)(S) = (S)(D) = r$. Tako se dobivaju prve projekcije C', D' krajnih točaka C i D drugoga konjugiranoga dijametra. Budući da je $A'\,B' \perp C'\,D'$, vidi se, da su oba ta dijametra o s i elipse k'. Druge će projekcije C'' i D'' imati nad Π_1 visine $C'\,(C)$ i $D'\,(D)$. Pravac $C''\,D''$ mora prolaziti točkom S''. Kako su $A''\,B''$ i $C''\,D''$ projekcije dvaju normalnih dijametara AB i CD kružnice k, bit će one **k o n j u g i r a n i d i j a m e t r i** za elipsu k'' (gl. **71.**). Obje se elipse k' i k'' mogu konačno izvesti poznatom kojom konstrukcijom.



Sl. 163.

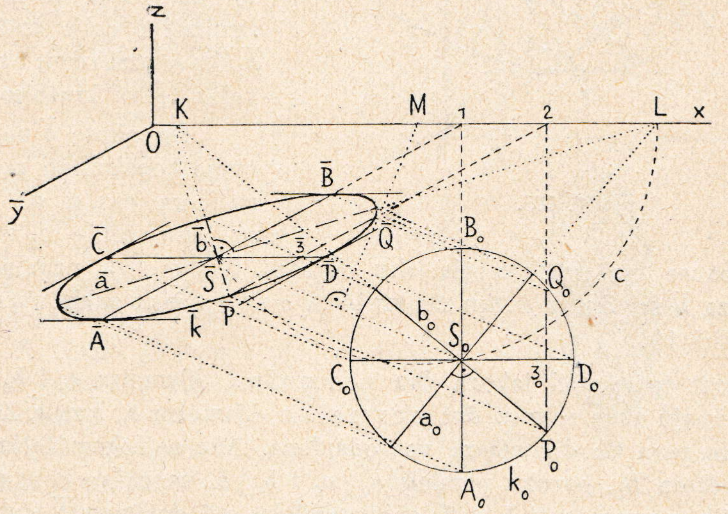
B i l j e š k a. Pružac $(C)(L)$ u sl. 163. može se shvatiti kao treća projekcija kružnice k na ravninu, položenu pravcem p normalno na Π_1; prvi trag te ravnine pada u p'. Dijametar AB projicira se u istu točku kao i S, t. j. u (S).

73. Kosa projekcija kružnice. Određenje za osi elipse. *1.* Posve istim načinom, koji je u slici 156. prikazan za određenje kose slike peterokuta, odredit će se i kosa slika $\bar{k}$ kružnice k (s l i k a 164.). Kružnica će se k, koja je zadana u Π_1, okrenuti oko osi x dolje u ravninu crtnje u položaj k_0. Za središte S_0 uzeto je, da mu je kosa slika u $\bar{S}$, t. j. da je prikrata iza-

brana po volji; time su određene sve zrake, koje spajaju preložaj na pr. P_0 s kosom slikom $\overline{P}$ te točke, t. j. bit će $P_0 \overline{P} \parallel S_0 \overline{S}, \ldots$ Tetiva $P_0 Q_0$ kružnice k_0, okomita na x, imat će kosu projekciju $\overline{P}\overline{Q}$, gdje je opet $\overline{P}\overline{Q} \parallel \overline{A}\overline{B}$, jer je $P_0 Q_0 \parallel A_0 B_0$. Točka će 3_0 na $C_0 D_0$ imati kosu projekciju u $\overline{3}$ na $\overline{C}\overline{D}$ i t. d.

Tangente na k_0 u krajevima dijametra $A_0 B_0$, koje su paralelne s dijametrom $C_0 D_0 \parallel x$, imat će kose projekcije, koje su tangente na $\overline{k}$ u $\overline{A}$ i $\overline{B}$, paralelne s dijametrom $\overline{C}\overline{D} \parallel x$. Kose projekcije pak tangenata u $\overline{C}$ i $\overline{D}$ na $\overline{k}$ bit će paralelne s $\overline{A}\overline{B}$, jer su tangente u C_0 i D_0 na k_0 paraletne s $A_0 B_0$. Zato će kose projekcije $\overline{A}\overline{B}$ i $\overline{C}\overline{D}$ biti konjugirani dijametri za $\overline{k}$. Ta je krivulja očito zatvorena, te je 2. reda; kosa je projekcija kružnice k elipsa $\overline{k}$.

Obje osi elipse $\overline{k}$ mogu se lako odrediti. Budući da su te osi $\overline{a}$ i $\overline{b}$ (normalni) konjugirani dijametri, bit će one kose projekcije dvaju dijametara a_0 i b_0 za k_0, koji su okomiti među sobom. Budući pak da će se a_0 i $\overline{a}$

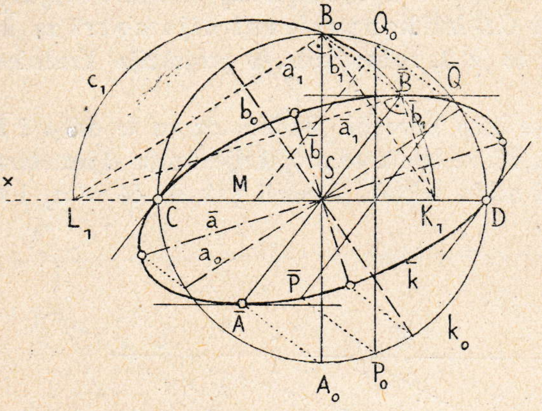


Sl. 164.

pa b_0 i $\overline{b}$ morati sjeći na osi x, u točkama L i K, položit ćemo točkama $\overline{S}$ i S_0 kružnicu c, kojoj je središte M na osi x. Ta će kružnica c sjeći x u L i K, pa su time određeni za k_0 i za $\overline{k}$ konjugirani normalni dijametri tako, da je jedan par tih dijametara a_0, b_0 preložaj, a drugi par $\overline{a}, \overline{b}$ njihova kosa projekcija. Krajne će se točke na osima dobiti, ako se krajnim točkama dijametra a_0 i b_0 povuku zrake paralelno s $S_0 \overline{S}$, ili s $P_0 \overline{P}$ i t. d.

2. Pomenuta se konstrukcija elipse $\overline{k}$ iz kružnice k_0 može priudesiti i za taj slučaj, kad je središte S kružnice k, koja je u Π_1, na osi x (slika 165.).

Okrenut ćemo kružnicu k oko x u ravninu crtnje u položaj k_0. Jedan će njezin dijametar CD biti na osi x, a normalan dijametar na CD bit će A_0B_0. Uzmimo po volji kosu sliku $\bar{B}$ za točku B_0 (jer se opet smjer osi $\bar{y}$ kao i prikrata mogu izabrati po volji). Spojnica svake druge točke preložaja i njezine kose slike bit će paralelna sa zrakom $B_0\bar{B}$, dakle $B_0\bar{B} \parallel A_0\bar{A} \parallel P_0\bar{P}$ i t. d. Dijametri A_0B_0 i CD za k_0 prelaze u kosoj projekciji u konjugirane dijametre $\bar{A}\bar{B}$ i CD za elipsu $\bar{k}$, koja je kosa projekcija kružnice k. Tangente će naime na $\bar{k}$ u C i D biti opet paralelne s dijametrom $\bar{A}\bar{B}$ elipse $\bar{k}$, a tangente na $\bar{k}$ u $\bar{A}$ i $\bar{B}$ paralelne s $CD \parallel x$ kao i u sl. 164. Vertikalna će se tetiva $P_0\,Q_0$ kružnice k_0 predočiti koso kao tetiva $\bar{P}\bar{Q} \parallel \bar{A}\bar{B}$ elipse $\bar{k}$, gdje je opet $Q_0\bar{Q} \parallel P_0\bar{P} \parallel B_0\bar{B}$. Tim se dakle načinom mogu konstruirati i dalje točke elipse $\bar{k}$, ako se uzme druga koja vertikalna tetiva kružnice k_0 i t. d.



Sl. 165.

Osi elipse $\bar{k}$ ne mogu se ovdje konstruirati posve istim načinom kao u sl. 164., jer su tamo točke S_0 i $\bar{S}$ rastavljene, pa se kružnica c mogla lako odrediti. U slici 165. padaju središta za k_0 i za $\bar{k}$ zajedno u točku S; kružnica c ne može se dakle nacrtati tako kao u slici 164.

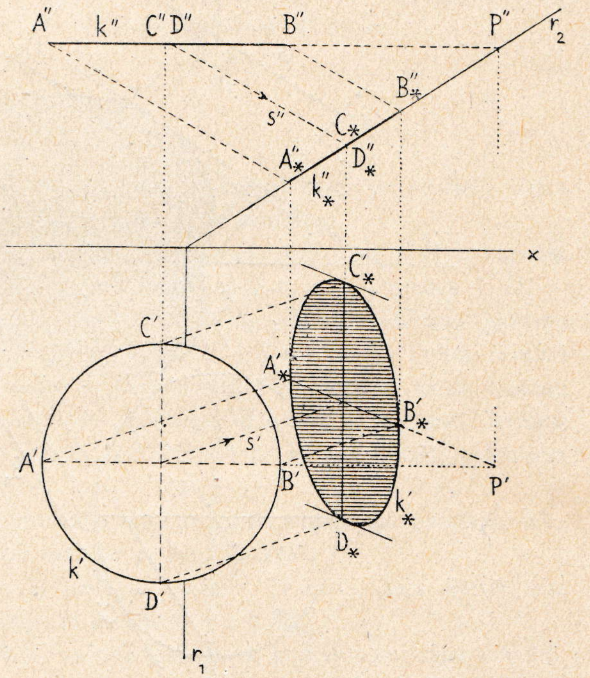
Morat će se naći takova dva normalna dijametra a_0 i b_0 kružnice k_0, koji imaju kose slike u dva normalna dijametra $\bar{a}$, $\bar{b}$ za $\bar{k}$. Zamislimo, da su oba para tih dijametara već određena. Ako se nekom točkom na k_0, na pr. točkom B_0, povuku paralele $a_1 \parallel a_0$ i $b_1 \parallel b_0$, morat će kose projekcije $\bar{a}_1$ i $\bar{b}_1$ tih pravaca a_1 i b_1 biti opet paralelne s $\bar{a}$, dotično s $\bar{b}$, dakle $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}$, $\bar{b}_1 \parallel \bar{b}$. No kako je $a_1 \perp b_1$, jer je po pretpostavci $a_0 \perp b_0$, tako će biti i $\bar{a}_1 \perp \bar{b}_1$, jer mora biti opet $\bar{a} \perp \bar{b}$. Kutovi $(a_1\,b_1)$ i $(\bar{a}_1\,\bar{b}_1)$ bit će pravi kutovi, kojima se homologni kraci a_1 i $\bar{a}_1$, pa b_1 i $\bar{b}_1$ moraju sjeći u točkama L_1 i K_1 na osi x. Pomenuti su dakle kutovi obodni kutovi u polukrugu c_1, koji ide vrhovima B_0 i $\bar{B}$, a središte mu je M na osi x.

Osi elipse $\bar{k}$ možemo dakle naći, ako preko B_0 i $\bar{B}$ opišemo polukrug c_1 iz M na x, pa sjecišta njegova L_1 i K_1 na osi x spojimo s točkama B_0 i $\bar{B}$. Središtem će se S u kružnici k_0 povući paralele $a_0 \parallel a_1$ i $b_0 \parallel b_1$, a u elipsi $\bar{k}$ paralele $\bar{a} \parallel \bar{a}_1$ i $\bar{b} \parallel \bar{b}_1$. Krajne točke na osima $\bar{a}$ i $\bar{b}$ elipse

dobit će se tako, da se krajnim točkama dijametara a_0 i b_0 povuku zrake paralelno s $B_0\overline{B}$, t. j. da se odrede kose projekcije tih krajnih točaka.

Posve nezavisno od kose projekcije možemo konstruirati osi elipse $\overline{k}$, od koje su poznata dva konjugirana dijametra $\overline{A}\overline{B}$ i CD. Preko CD kao dijametra opisat će se kružnica k_0, na njoj će se odrediti točka B_0, ako se povuče $SB_0 \perp CD$, dalje će se spojiti B_0 sa $\overline{B}$, odrediti kružnica c_1 kao prije, pa dalje nastaviti konstrukcija, koja je upravo istumačena. Za to određenje osi elipse ne treba dakle da krivulja bude nacrtana.

74. Sjena kružnice na zadanu ravninu. Ima li se odrediti sjena kružnice k na zadanu neku ravninu ρ, odredit će se sjene za dva normalna dijametra kružnice na ρ; njihove će sjene biti konjugirani dijametri za sjenu k_*, koja će biti elipsa.



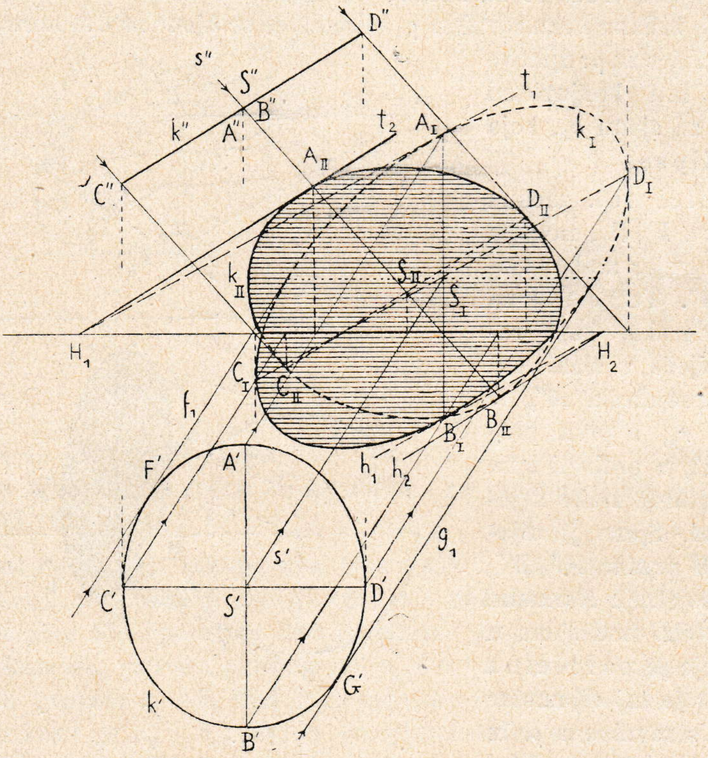
Sl. 166.

U slici 166. zadana je kružnica $k \parallel \Pi_1$, ravnina $\rho \perp \Pi_2$ i smjer zraka svjetlosti s', s''. Točkom A na k prolazi zraka, koja ravninu ρ siječe u sjeni A_*; druga je projekcija A''_* te sjene na r_2, a prva projekcija A'_* u ordinali i na prvoj projekciji zrake svjetlosti za A. Sjena je dijametra AB pružac $A'_* B'_*$ u prvoj projekciji. Normalni dijametar CD ima sjenu u $C_* D_*$, koja je paralelna s CD, jer je taj dijametar paralelan s ravninom ρ. Iz oba će se konjugirana dijametra $A'_* B'_*$ i $C'_* D'_*$ odrediti elipsa k'_* poznatim kojim načinom.

Budući da je $A_* B_*$ s dijametrom AB u istoj ravnini svjetlosti, sjeći će se oba ta pravca u točki P, kojoj je druga projekcija u P'' na tragu r_2.

Bilješka. Zrake, kojima se u kosoj projekciji dobiva kosa slika neke tvorevine, mogu se držati zrakama svjetlosti; kosa je slika u tome slučaju sjena one prostorne tvorevine na ravninu slike xz. Tako se u sl. 164. može uzeti, da u ravnini xz (ispod osi x) namještena kružnica k_0 baca sjenu na horizontalnu ravninu xy u elipsu $\overline{k}$, ako su zrake svjetlosti pravci, koji se u slici prikazuju u smjeru $S_0\overline{S} \parallel B_0\overline{B} \parallel A_0\overline{A}$ . . . .

75. Sjene kružnice na ravnine projekcijâ Π_1 i Π_2. U slici 167. prikazana je u projekcijama kružnica k, koja je nagnuta prema Π_1, a ravnina joj je normalna na Π_2. Iz druge projekcije k'' te kružnice dobit će se k', ako se uzme dijametar $C' D' \parallel x$; taj će pružac $C' D'$ biti mala os za elipsu k'. U sredini S' male osi postavljena okomica na x bit će smjer velike osi za k'. Dužina se velike osi vidi u Π_2; bit će naime $S' A' = S' B' = S'' C'' = S'' D''$. Kad bi bilo $S' A' \gtrless S'' C''$, značilo bi to, da k u prostoru nije kružnica nego elipsa.



Sl. 167.

Sjene kružnice k na Π_1 naći će se tako, da se poznatim načinom odrede sjene za oba dijametra $AB \perp CD$, t. j. pruši $A_I B_I$ i $C_I D_I$, koji imaju zajedničku sredinu S_I (gl, § **44.**). Ti će pruši biti konjugirani dijametri za sjenu k_I, koja će biti elipsa (gl. § **73.**). Sjena će $A_I B_I$ biti normalna na osi x, jer je dijametar AB kružnice normalan na Π_2. Tangente će dakle na k_I u C_I i D_I biti normalne na x, jer moraju biti paralelne s $A_I B_I$. Tangente će pak t_1 i h_1 u A_I i B_I biti paralelne sa sjenom $C_I D_I$.

Sjena k_{II} kružnice k na Π_2 bit će opet elipsa; sjene dijametara AB i CD, t. j. $A_{II}B_{II}$ i $C_{II}D_{II}$, bit će konjugirani dijametri za k_{II}. Središte je za k_{II} sjena S_{II}. Tangente na k_{II} u C_{II} i D_{II} jesu ujedno druge projekcije zrakâ kroz C'' i D''.

Tangente t_2 i h_2 u krajevima dijametra $A_{II}B_{II}$ sjeći će os x u istim točkama H_1 i H_2, kojima prolaze i tangente t_1 i h_1. Ravnina svjetlosti, položena tangentom kružnice k u njezinoj točki A, sjeći će Π_1 u tragu t_1, a Π_2 u tragu t_2. Ti su dakle tragovi ujedno tangente za sjene k_I i k_{II} u A_I i A_{II}. Isto to vrijedi za obje tangente h_1 i h_2 u B_I i B_{II}.

Obje elipse k' i k_I imaju dvije zajedničke tangente f_1 i g_1, koje su paralelne sa smjerom s'. Pravci su naime f_1 i g_1 tragovi dviju paralelnih ravnina svjetlosti, koje kružnicu k dotiču u točkama F i G.

Zadaci za vježbu.

250.) U ravnini je τ (4, 3, ∞) zadana kružnica, kojoj je središte točka S (2, ?, 5), a polumjer $r = 3$. Nacrtaj projekcije te kružnice.

251.) Od elipse k'' u sl. 161. neka bude poznata velika os CD i tangenta t''. Kako će se odrediti mala os? Tangenta mora sjeći x izvan prušca CD!

252.) Nađi točku D, koja od zadane tri točke A, B i C ima jednaku udaljenost $d = 5$; A (3, 2, 4), B (—4, 4, 2), C (0, 6, 7). — Položi ravninu ABC, preloži je zajedno s trokutom u jednu ravninu projekcijâ, opiši trokutu $A_0B_0C_0$ kružnicu k_0, kojoj je središte S_0, digni S natrag u ravninu i uzdigni u S', S'' normalu na ravninu. Kateta DS odredit će se s pomoću polumjera kruga k_0 i hipotenuze $d = 5$.

253.) Okreći točku P oko pravca p, koji je zadan u općenom položaju, tako dugo, dok P dođe u neku zadanu ravninu ρ. Isp. sl. 163.

254.) U ravnini je ρ (6, 6, 5) zadana kružnica ($r = 4$), koja dotiče oba traga r_1 i r_2. Odredi obje projekcije te kružnice. Gl. § **52.**

255.) U ravnini je σ (∞, 3, 4) zadana kružnica k, koja ima polumjer $r = 2{\cdot}5$. Odredi projekcije onih tangenata te kružnice, koje izlaze iz točke Q (5, 3, 0) na tragu s_1.

256.) Točkom S prolaze dva pravca p i q. Nacrtaj projekcije kružnice ($r = 4$), koja ima središte S, a nalazi se u ravnini (pq).

257.) Odredi projekcije središta S one kružnice, koja je u ravnini τ (—3, 5, 4), dvije su joj točke na tragu s_1; A (—2, ?, 0), B (—1, ?, 0), a polumjer je $r = 3$.

258.) Zadana je kružnica $k \parallel \Pi_1$, središte joj je S (4, 3, 5), polumjer $r = 3$. Okreni k oko pravca $p \perp \Pi_2$, dok ravnina kružnice bude prema Π_1 priklonjena za 60^0, a onda opet oko pravca $q \perp \Pi_1$ za 120^0.

259.) Nacrtaj kosu projekciju kružnice ($r=3$), koja je u ravnini yz. Vertikalni će dijametar imati u kosoj slici dužinu 6, a konjugirani će se dijametar (koji je paralelan s y) prikratiti prema prikrati, koja neka se izabere po volji.

260.) Nacrtaj obje projekcije za kružnice k_1 i k_2, koje imaju zajednički jedan dijametar AB, a ravnine su im priklonjene pod pravim kutom ($r_1 = r_2 = 3$). Odredi nevidljive dijelove!

261.) Nacrtaj sjene kružnice k, koja je u ravnini $\sigma \perp x$, na Π_1 i Π_2.

262.) Odredi sjene kružnice k, koja je u ravnini $\sigma \perp \Pi_1$, i to na Π_1 i Π_2.

263.) Odredi sjene kružnice k, koja dotiče ravnine Π_1 i Π_2, a ravnina joj je paralelna s x.

264.) Odredi na Π_1 i Π_2 sjene kružnica k u sl. 163.

265.) Nađi sjenu, što je baca na Π_1 kružnica k (u ravnini $\sigma \parallel \Pi_2$), i odredi osi za eliptičku sjenu prema postupku u sl. 164. Preloži k oko s_1 u Π_1

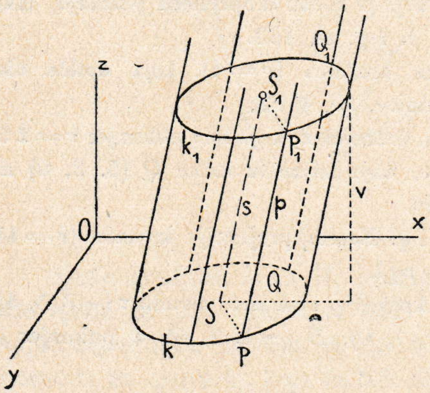
266.) Odredi sjenu, što je baca krug $k \parallel \Pi_1$ (u visini 6 nad Π_1) na ravninu ρ (—3, 4, 5) i na Π_1 te Π_2; polumjer kruga $r=3$.

267.) U ravnini ρ, koja s Π_1 čini kut $\alpha = 60^0$, zadana je kružnica k. Izaberi smjer zrakâ svjetlosti tako, da sjena te kružnice na ravninu Π_1 bude opet kružnica k_I. Odredi najprije ravninu, prema kojoj će k i k_I biti simetrični.

268.) Odredi sjene nekoga kruga k tako, da jedan dio sjene padne na Π_1, drugi na Π_2, a treći na ravninu $\tau \perp x$. Prikaži pravu veličinu onoga dijela, koji pada na τ.

II. Predočivanje oblih tračnih površina.

76. Izvođenje valjka. Valjak postaje sličnim načinom kao i prizma (gl. § **60.**), t. j. tako, da se pravac p miče po nekoj zadanoj krivulji, na pr. po kružnici k, ostajući neprestano paralelan s početnim položajem. Takov je postanak predočen u kosoj projekciji u slici 168.



Sl. 168.

Pravac se p zove u svakom svojem položaju izvodnica valjka. Kružnica je k osnovka valjka. Budući da izvodnice mogu biti na obje strane neomeđene, a u tome bi slučaju bio i valjak prema obje strane neomeđen, možemo za donju među uzeti osnovku, a kao gornju među položiti gdjegod ravninu paralelno s osnovnom ravninom. Obično razumijemo pod valjkom onaj dio površine, koji je sadržan među obje pomenute paralelne ravnine.

Gornja će ravnina sjeći svaku izvodnicu valjka u jednoj točki: P_1, Q_1 . . , a sva će ta probodišta činiti krivulju k_1. Položimo središtem S osnovke k pravac s, paralelan s izvodnicama, koji gornju ravninu siječe u točki S_1. Imat ćemo $SS_1 \# PP_1 \# QQ_1 \# \ldots$ Zato je $SP \parallel S_1 P_1$, $SQ \parallel S_1 Q_1 \ldots$ i $SP = SQ = \ldots = S_1 P_1 = S_1 Q_1 = \ldots$ Krivulja je dakle k_1 opet kružnica sukladna s k. Pravac je SS_1 os valjka.

Ako su izvodnice valjka normalne na ravnini osnovke k (dakle i na ravnini osnovke k_1), zove se valjak uspravan, inače je valjak kos. Daljina v između ravninâ obadviju osnovaka, t. j. dužina prušca na zajedničkoj normali tih ravnina, zove se visina valjka.

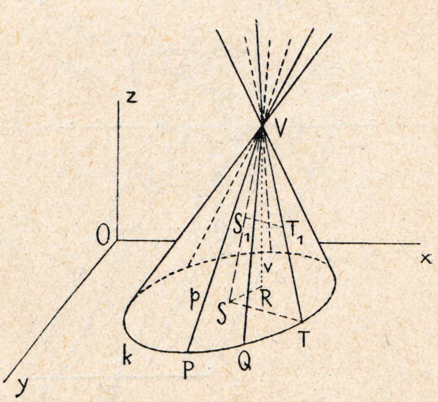
Svakom točkom na plaštu prolazi jedna izvodnica; budući pak da i tom točkom možemo položiti paralelno s osnovkom ravninu, koja će plašt sjeći u kružnici, vidi se, da svakom točkom plašta prolazi po jedna kružnica k_2, k_3 . . . . , koja je sukladna s k i k_1. Tako se može na plaštu zamisliti gusta mreža, sastavljena od izvodnicâ i od kružnih prosjekâ k, k_1, k_2 . . . .

Svaka ravnina, koja prolazi osju SS_1 valjka, siječe plašt u dvije dijametralno suprotne izvodnice. Isto će tako svaka ravnina, položena paralelno s osi SS_1, sjeći plašt u dvije izvodnice, koje mogu biti među sobom bliže ili pak više udaljene, već prema tomu, je li ona ravnina dalje od osi valjka ili bliže toj osi.

Usprâvan valjak može postati i tako, da se pravac p, koji je paralelan s pravcem s, okreće oko toga čvrstoga pravca s.

Bilješka. U ovoj ćemo knjizi uzeti svuda za osnovku valjka kružnicu, premda osnovka može biti i druga krivulja. Takvi su valjci površine 2. reda, jer ih neki pravac prostora može sjeći najviše u dvije točke.

77. Izvođenje stošca. Stožac postaje sličnim načinom kao i piramida (gl. § **60.**). Miče li se pravac p po nekoj zadanoj krivulji, na pr. po kružnici k, a ide ujedno čvrstom nekom točkom V, koja je izvan ravnine kružnice k, opisuje on stožac (slika 169.). Kružnica je k osnovka, a točka V vrh stošca. Pravac p, koji micanjem izvodi stožac, zove se u svakom položaju izvodnicom stošca. Budući da se izvodnica p može produžiti preko vrha V, postaje micanjem pravca p ujedno onaj dio stošca, koji je produženje donjega dijela preko vrha V. Često se kao stožac označuje samo onaj dio između vrha i osnovke. Pravac, koji spaja vrh V sa središtem S



Sl. 169.

osnovke k, zove se os stošca. Os može biti okomita na ravnini osnovke; u tome je slučaju stožac uspravan. Ako je os nagnuta pod kojimgod kutom prema ravnini osnovke, stožac je kos. Dužina normale VR, spuštena iz vrha V na ravninu osnovke, zove se visina stošca.

Onaj dio stošca, na kojem su izvodnice (dakle stožac, kojemu se oduzela osnovka), zove se plašt.

Izaberemo li na osi kojugod točku S_1 pa njome povučemo paralele sa svim polumjerima osnovke, dobit ćemo ravninu, koja je s osnovkom paralelna. Točke $T_1, Q_1, P_1 \ldots$, u kojima ta ravnina siječe izvodnice stošca, bit će na kružnici.

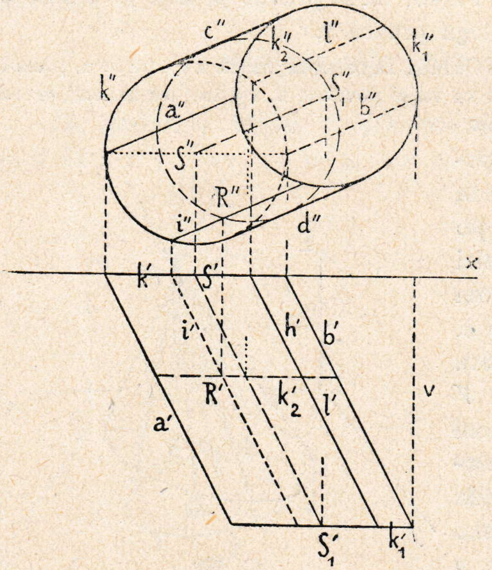
Povučemo li naime za kojugod izvodnicu VT polumjer osnovke ST i točkom S_1 paralelu S_1T_1 s ST, bit će u sličnim trokutima VST i VS_1T_1

$$VS : VS_1 = ST : S_1T_1.$$

Budući da je omjer $VS : VS_1$ stalan, t. j. jednak nekoj veličini c, bit će

$$S_1T_1 = \frac{ST}{c}.$$

Kako je pak ST stalna veličina, t. j. polumjer r osnovke, bit će stalna i dužina $S_1T_1 = \frac{r}{c}$ za sve izvodnice stošca, dakle $S_1T_1 = S_1Q_1 = S_1P_1 = \ldots$ Prema tomu je krivulja točaka T_1, Q_1, P_1 .... kružnica k_1.



Slika 170.

Svakom točkom na plaštu prolazi jedna izvodnica i jedna kružnica (k_1).

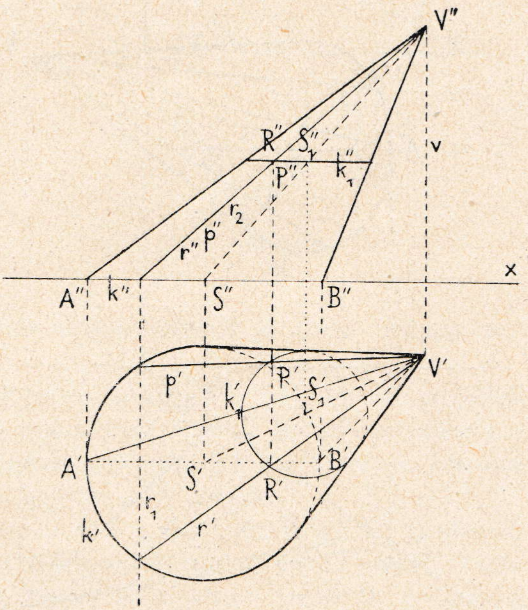
Svaka ravnina, koja ide vrhom V stošca, a siječe stožac, sjeći će plašt u dvije izvodnice.

Uspravan kružni stožac može postati i tako, da se pravac p, koji siječe neki pravac s u točki V, okreće oko čvrstoga pravca s. Svaka će točka na pravcu p opisati kružnicu k_1, koja će biti na plaštu uspravnoga stošca. Sve izvodnice VP uspravnoga stošca imaju istu dužinu i isti priklon prema ravnini osnovke (gl. § **5.**, *7*). Valjak i stožac zovu se jednim imenom oble tračne površine, jer su na njima posve sadržane izvodnice (ili traci), što naprotiv za druge oble površine, na pr. za kuglu ili elipsoid, ne vrijedi.

Bilješka. Za osnovku stošca uzet ćemo u ovoj knjizi svagda kružnicu (no osnovka može biti i druga krivulja, na pr. elipsa i t. d.). Takvi su stošci površine 2. reda, jer ih neki pravac prostora može sjeći najviše u dvije točke.

78. Projekcije valjka, njegovih izvodnica i točaka. Kružni kosi valjak, kojemu je osnovka k u Π_2, predočen je u slici 170. Visina je valjka v uzeta po volji. Dvije krajne izvodnice a i b za prvu projekciju ne prikazuju se u drugoj projekciji opet kao krajne. Konturu u Π_2 čine one dvije izvodnice, koje su dvije zajedničke tangente c'' i d'' za projekcije k'' i k''_1 donje i gornje osnovke. U prvoj će projekciji biti vidljive sve one česti valjka, koje su na gornjoj polovini njegovoj nad ravninom izvodnicâ a i b. U drugoj su pak projekciji vidljivi oni dijelovi, koji su na prednjem dijelu valjka pred konturnim izvodnicama c, d. Zato će na pr. izvodnica l biti u prvoj projekciji vidljiva, a u drugoj projekciji nevidljiva. Projekcija je l' ujedno prva projekcija druge jedne izvodnice h na valjku. Gdje je druga projekcija h''?

U sl. 170. izabrana je izvodnica i na donjoj polovini valjka, a na toj izvodnici točka R. Točka je dakle R', R'' na plaštu valjka. Kružnica k_2, položena paralelno s ravninom osnovke, prikazat će se u Π_1 kao pravac $k'_2 \parallel x$; u drugoj će projekciji biti k''_2 kružnica jednakoga polumjera kao k i k_1 (koja dotiče obje krajne izvodnice c'' i d''). Središte će te kružnice biti na drugoj projekciji osi S'' S''_1 valjka. Ako za neku zadanu točku R' u prvoj projekciji plašta treba odrediti R'', položit će se kroz R' pravac $k'_2 \parallel x$ i nacrtati u Π_2 pripadna kružnica k''_2; u ordinali za R' bit će na k''_2 točka R''. Vidi se, da su dvije takve projekcije R'' moguće, jer se u R' prikrivaju prve projekcije dviju točaka na plaštu. Projekcija R'' može se odrediti i s pomoću i''. Obrnutim će se postupkom naći za neku točku Q plašta, od koje je poznata druga projekcija Q'', pripadna prva projekcija Q', i to s pomoću izvodnice ili kružnice kroz točku Q.



Sl. 171.

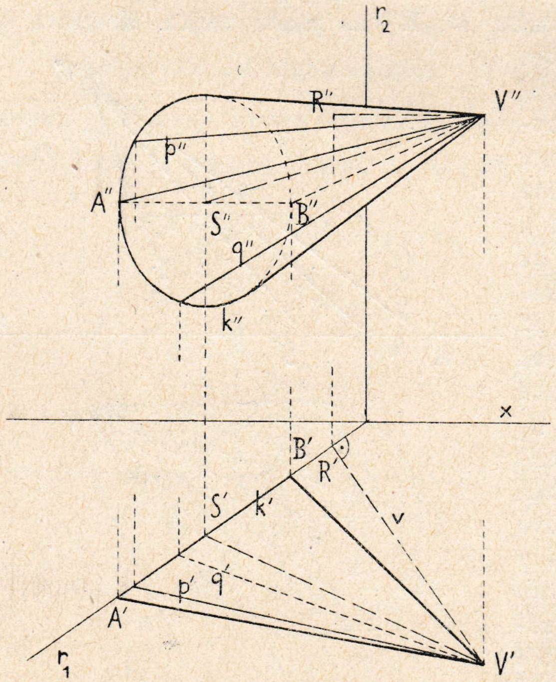
79. Projekcije stošca, njegovih izvodnica i točaka. U slici 171. predočen je kružni kosi stožac, kojemu je osnovka k u Π_1, vrh mu je V, a

visina v. Krajne su izvodnice stošca u prvoj projekciji tangente povučene iz V' na k'. Te tangente dijele vidljivi dio površine od nevidljivoga dijela u Π_1. U drugoj je projekciji vidljiv prednji dio stošca, kojemu krajne izvodnice AV i BV imaju ujedno konturne projekcije $A''V''$ i $B''V''$ u Π_2.

Na stošcu su povučene dvije izvodnice r i p, kojima se druge projekcije prikrivaju; ravnina ρ, položena tim izvodnicama, imat će drugi trag r_2 u r'' i p'', a prvi je trag r_1 normalan na x. Trag će r_1 sjeći k' u prvim probodištima izvodnicâ r i p; ta su probodišta na osnovci k'.

Izaberemo li na $r'' \equiv p''$ kojugod točku $R'' \equiv P''$, bit će u ordinali na r' točka R', a na p' točka P'. Točka je P na stražnjoj strani stošca, a točka R na prednjoj strani.

Položimo li kroz R'' horizontalan pravac, značit će on trag ravnine $\sigma \parallel \Pi_1$, koja siječe stožac u kružnici k_1 (gl. § 77.). Središte je te kružnice na osi SV stošca. Prva će projekcija kružnice k_1 doticati obje tangente kružnice k' iz V', a prolazit će prvim projekcijama R' i P' dviju točaka R i P na plaštu stošca.



Sl. 172.

Ako uzmemo, da je ravninom kružnice k_1 stožac presječen, pa ako promatramo samo onaj dio stošca, koji je sastavljen od osnovke k, od gornje granične kružnice k_1 i od plašta među paralelnim ravninama kružnicâ k i k_1, imamo p r i k r a ć e n i s t o ž a c, koji može biti uspravan ili kos, kako je već postao iz uspravnoga ili kosoga stošca.

U s l i c i 172. nacrtane su projekcije kosoga stošca, kojemu je osnovka kružnica k u ravnini $\rho \perp \Pi_1$. Druga se projekcija k'' osnovke prikazuje kao elipsa; vrh je V izabran po volji. Normala VR iz vrha V na ravninu osnovke ρ daje visinu stošca; ta se visina vidi u Π_1 u pravoj veličini.

Na stošcu su izabrane dvije izvodnice p i q; u drugoj su projekciji obje te izvodnice vidljive, u prvoj je projekciji vidljiva samo izvodnica p. Zašto? Koje će izvodnice biti vidljive u Π_2?

Krajne izvodnice AV i BV u prvoj projekciji čine među za gornji vidljivi dio i za donji nevidljivi dio stošca u projekciji na Π_1.

Zadaci za vježbu.

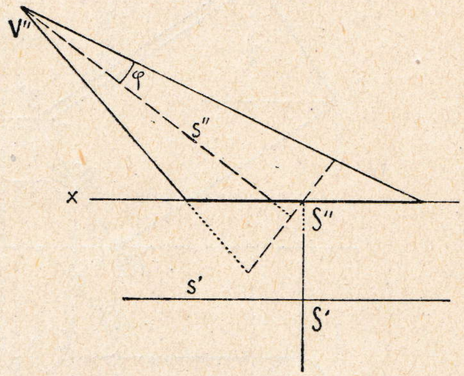
269.) Prikaži valjak u sl. 170. u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$).

270.) Prikaži kosu projekciju uspravnoga valjka, ako je $\alpha = 90^0$, *pr.* $\frac{1}{3}$.

271.) Prikaži kosu projekciju kosoga stošca, kojemu je osnovka u xz, a visina mu je v zadana ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{3}$).

272. Okreni stožac u sl. 172. oko pravca $q \perp \Pi_2$ za 120^0 na desno.

273.) Zadana je os stošca, $s \parallel \Pi_2$ (slika 173.). Nacrtaj projekcije uspravnoga kružnoga stošca, kojemu izvodnice čine s osi s kut φ, a visina mu je nad Π_1 $v = 5$. Osnovka stošca na Π_1 bit će elipsa, za koju će velika os biti paralelna s x. Odredi veličine za obje osi. Središte S osnovke ne će biti u prvom probodištu osi stošca!



Sl. 173.

274.) Prikaži projekcije pravilnoga tetraedra i nacrtaj stožac, koji je tetraedru opisan. Vrh će stošca biti u vrhu tetraedra, a tri pobočna brida tetraedra bit će izvodnice stošca. Osnovka je stošca kružnica, opisana osnovci tetraedra.

275.) U Π_1 zadana je elipsa e (s osima $2a \parallel x$ i $2b$). Prikaži projekcije uspravnoga kružnoga valjka, koji prolazi tom elipsom. Malom osi elipse položi ravninu σ tako, da kružnica k, opisana u σ preko $2b$ kao promjera, određuje zajedno s elipsom e izvodnice valjka, koje su na σ normalne.

276.) Zadana je ravnina σ (—3, 5, 4) i u njoj točka M (2, 3, ?). Povuci točkom M u σ pravac m, koji će s Π_1 zatvarati prikloni kut $\alpha = 45^0$. Točka je M vrh uspravnog kružnog stošca, kojemu su izvodnice prema Π_1 priklonjene pod kutom $\alpha = 45^0$. Isp. zadatak 167.

277.) Kosoj četverostranoj prizmi, kojoj je osnovka u $\Pi_3 \perp x$ tetivni četverokut, opiši valjak. Bridovi prizme bit će izvodnice valjka.

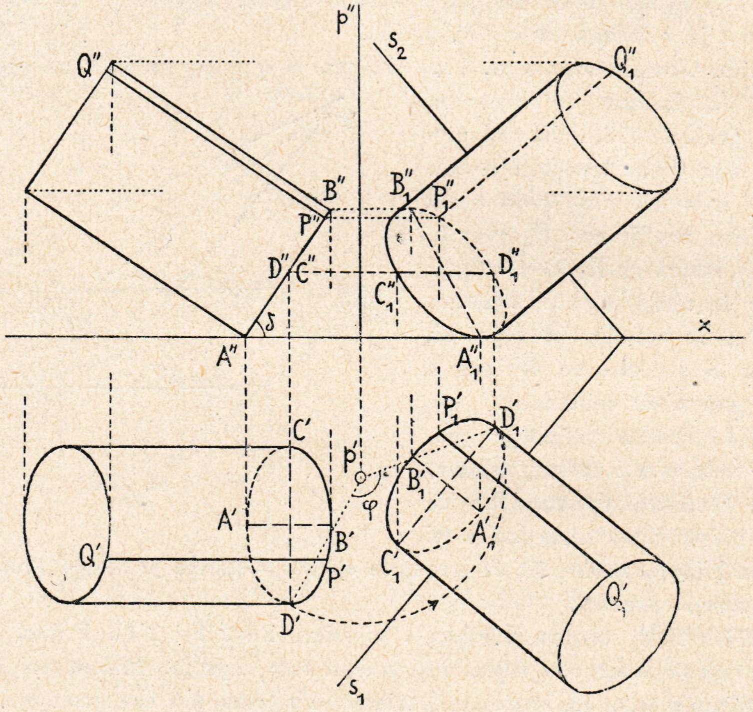
278.) Prikaži projekcije uspravnoga kružnoga valjka, kojemu je os pravac A (—3, 5, 2) B (3, 2, 2), a koji je jednom izvodnicom položen na Π_1.

279.) Odredi i obilježi projekcije uspravnoga kružnoga stošca, kojemu je os u osi x.

280.) Nacrtaj kosu projekciju istostranoga valjka (visina jednaka premjeru osnovku), kojemu je osnovna kružnica k u ravnini $y\, z$.

281.) Nacrtaj uspravni kružni stožac, koji ima zadanu visinu $v = 5$, u općenoj kosoj projekciji (gl. § **26.**) tako, da mu os bude u osi z. Smjerovi za x i y bit će dva konjugirana dijametra za kosu sliku osnovke! Izaberi jedinice na slikama po volji.

282.) Prikaži treću projekciju kosoga kružnoga stošca, kojemu je osnovka u Π_2, ako je $\Pi_3 \perp \Pi_2$.

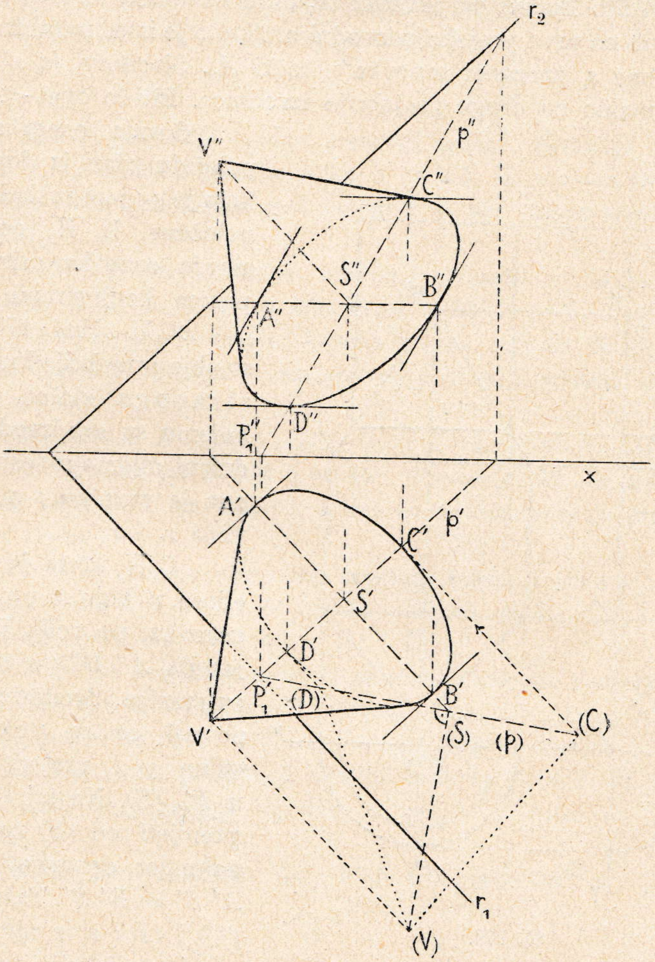


Sl. 174.

80. Projekcije valjka i stošca u općenim položajima. *1.* Uspravni kružni valjak, kojemu su izvodnice paralelne s Π_2, a osnovka mu je prema Π_1 nagnuta pod kutom δ, položen je tako, da se jednom točkom A osnovke dotiče ravnine Π_1 (slika 174.).

Prva projekcija osnovke bit će elipsa $A' B' C' D'$, kojoj osi $A' B'$ i $C' D$ izlaze iz druge projekcije ordinalama. Na gornjoj prednjoj strani valjka izabrana je izvodnica, koja osnovku siječe u točki P.

Da se dobije općeniji položaj toga valjka prema Π_1 i Π_2, okrenut ćemo ga oko pravca $p \perp \Pi_1$ za kut φ. Prva će projekcija osnovke doći u nov položaj $A'_1\, B'_1\, C'_1\, D'_1$, gdje će opet A'_1 biti točka osnovke, u kojoj ona dotiče ravninu Π_1. Visine će točaka A, B, C i D nad Π_1 ostati za okretanja iste. Druga projekcija A''_1 točke A_1 bit će dakle u osi x, točka

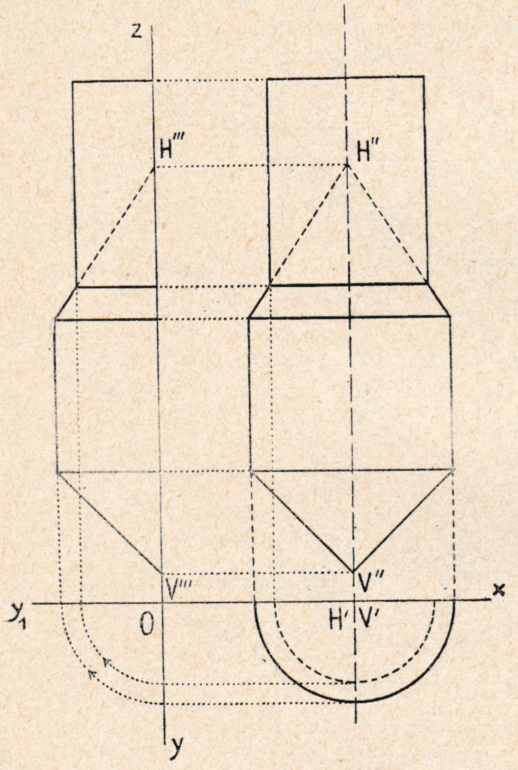


Sl. 175.

je B''_1 na paraleli kroz B'' s osi x i t. d. Osi $A'_1\, B'_1$ i $C'_1\, D'_1$ za prvu projekciju osnovke u novom položaju imat će druge projekcije $A''_1\, B''_1$ i $C''_1\, D''_1$, koje će za drugu projekciju osnovke biti konjugirani dijametri; kako je $C\, D$ horizontalan pravac, bit će $C''_1\, D''_1 \parallel x$.

Točka P', P'' na osnovci doći će u novi položaj P'_1 P''_1; izvodnica, koja ide tom točkom, bit će u novom položaju nevidljiva u Π_2, a vidljiva u Π_1. Smjer izvodnicâ na Π_2 u novom položaju dobit će se s pomoću točke Q na izabranoj izvodnici.

Tragovi ravnine σ, u kojoj je osnovka valjka poslije zaokreta, moći će se lako odrediti. Budući da je točka A_1 osnovke u Π_1, ići će trag s_1 točkom A'_1 normalno na prvu projekciju izvodnica, ili, što je isto, paralelno s C'_1 D'_1. Trag je naime s_1 tangenta osnovke u točki A_1. Sjecištem $(s_1\ x)$ ići će drugi trag s_2 normalno na drugu projekciju izvodnica. Bit će opet $\sphericalangle (\sigma\ \Pi_1) = \delta$.



Sl. 176.

Gornja osnovka u novom, položaju izlazi iz donje osnovke$_1$ koja je s njom sukladna i jednako položena. U Π_1 odredit će se gornja osnovka osima, a u Π_2 parom konjugiranih dijametara.

2. U slici 175. prikazane su obje projekcije kružnoga i s t o s t r a n o g a stošca, t. j. stošca, kojemu su sve izvodnice jednake dužini dijametra osnovke. Osnovna je ravnina ρ zadana tragovima r_1 i r_2.

U Π_1 uzeta je os A' B' $\parallel$ r' elipse, u koju se projicira kružna osnovka, po volji. Druga je projekcija A'' B'' $\parallel$ x određena kao sutražnica. Središtem S osnovke povući će se priklonica p ravnine ρ i preložiti na stranu u P'_1 (S). Na taj će se preložaj prenijeti od (S) na obje strane polumjer osnovke, dakle dužina A' $S' = B'$ S'. Tako će se dobiti (C) i (D), a iz njih C' i D' na prvoj projekciji priklonice. Na drugoj projekciji priklonice bit će u ordinalama C'' i D'' tako, da su A'' B'' i C'' D'' konjugirani dijametri za drugu projekciju osnovke. Visina uspravnoga stošca bit će normala u S na ravninu ρ, a prema tomu i na priklonicu, koja ide središtem S. Učini li se dakle $(C)\ (V) = (D)\ (V) = (C)\ (D)$, dobit će se točka (V), a iz nje izlazi V' i V''. Tangente iz V' i iz V'' na prvu, dotično drugu projekciju osnovke bit će krajne izvodnice stošca u projekcijama na Π_1, dotično na Π_2.

81. Projekcije tijela, koje je sastavljeno od valjaka i stožaca. U slici 176. prikazane su tri projekcije tijela, koje je sastavljeno od dva valjka, jednoga uspravnoga stošca i jednoga prikraćenog stošca. Iz prve projekcije, koja sadržava samo dva polukruga, izlazi, da se radi o oblim površinama. Tijelo se drži ravnine Π_2; pred Π_2 vidljiva je prednja polovina toga tijela, kakovo se često javlja u građevinama kao podnožak potpornoga stupa. Visina donjega stošca i prikraćenog stošca izabrana je po volji.

Zadaci za vježbu.

283.) Nacrtaj projekcije kosoga kružnoga valjka, kojemu je osnovka u ravnini ρ (∞, 5, 4), središte osnovke točka S (3, 2·5, ?), a visina je valjka $v = 5$. Izvodnice neka budu priklonjene pod kutom $\varphi = 45^0$ prema ravnini ρ, a paralelne prema $\Pi_3 \perp x$.

284.) Predoči projekcije stošca, kojemu je osnovka u ravnini σ (3, 4, 2), središte osnovke S (1, 2.. ?), a vrh je u osi x točka V (—2, 0, 0).

285.) Nacrtaj projekcije stošca, kojemu kružna osnovka dotiče sva tri traga ravnine σ (4, 5, 4), a vrh mu je na pravcu, koji spaja središte osnovke s početnom točkom O.

286.) Oko pravca A (5, 4, 4), B (—3, 3, 2) okreni pravac AC, C (2, 5, 1) za kut $\varphi = 60^0$, a onda još za kut $\psi = 45^0$. Pravac je AB os uspravnoga kružnoga stošca, točka je C na osnovci, a dva su tražena položaja pravca AC izvodnice toga stošca.

287.) Predoči projekcije uspravnoga kružnoga valjka, kojemu je visina $v = 5$, jedna izvodnica u osi x, a os mu je jednako udaljena od Π_1 i Π_2 u I. kvadrantu. Odredi izvodnice, u kojima valjak siječe Π_1 i Π_2.

288.) Zadane su projekcije uspravnoga stošca: središte osnovke S (2, 3, 0), polumjer osnovke $r = 2$, visina $v = 4$. Okreni stožac oko pravca p, koji je tangenta osnovke, normalna na x, dok vrh V stošca dođe u ravninu σ (∞, ∞, 2·5).

289.) Za kosi stožac poznato je središte osnovke S (3, 3, 0), $r = 2$, i vrh V (6, 1, 4). Uzmi treću ravninu Π_3 tako, da projekcija stošca na Π_3 bude istokračan trokut.

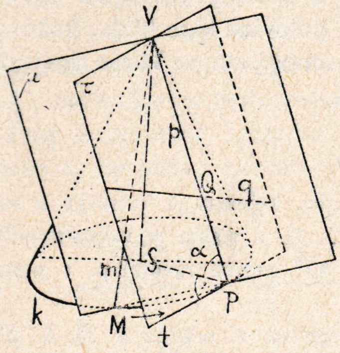
290.) Nacrtaj kosu projekciju tijela u sl. 176., $\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$.

III. Dodirne ravnine i sjene oblih tračnih površina.

82. Dodirna (tangencijalna) ravnina. Neka bude zadan stožac, kojemu je osnovka kružnica k, a vrh točka V (slika 177.).

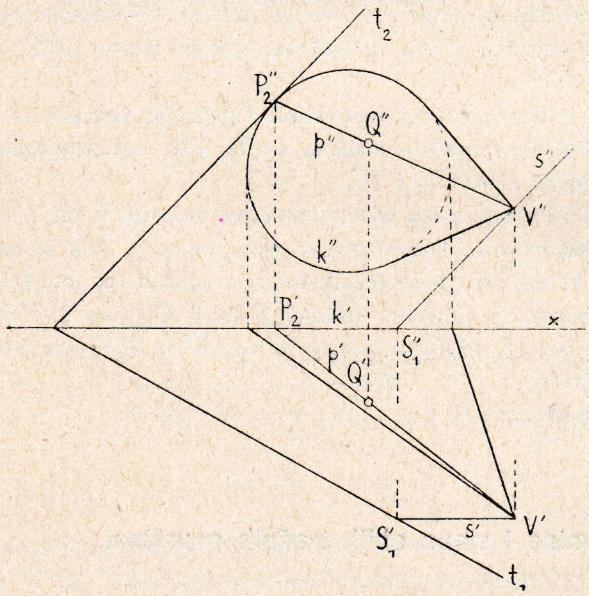
Na plaštu je izabrana izvodnica p, koja osnovku siječe u točki P. Kroz p ćemo položiti kakvugod ravninu μ, koja će plašt sjeći još u izvodnici

m; probodište te izvodnice s ravninom osnovke bit će točka *M* na *k*. Svaka ravnina, koja ide vrhom stošca, sjeći će uopće stožac u dvije izvodnice, jer njezin trag na ravnini osnovke siječe osnovku u dvije točke (na pr. u *P* i *M*). Zamislimo, da se ravnina μ okreće oko čvrste izvodnice *p* tako, da druga izvodnica *m*, koja je u toj ravnini, dolazi sve bliže izvodnici *p*. Kad *m* dođe tako blizu k izvodnici *p*, kakogod možemo zamisliti, doći će ravnina μ u nov položaj τ, u kojem se zove d o d i r n a ili t a n g e n c i j a l n a r a v n i n a stošca po izvodnici *p*. Trag *t* ravnine τ na ravnini osnovke bit će tangenta osnovke *k* u *P*.



Sl. 177.

Dodirna ravnina ima dakle sa stošcem zajedničke dvije izvodnice, koje su neizmjerno blize jedna drugoj, pa koje uzimamo kao j e d n u *(p)*. Takva dodirna ravnina dotiče stožac duž c i j e l e izvodnice *p*. Obrnuto izlazi, da će s v a k i pravac *q* u ravnini τ biti tangenta stošca u onoj njegovoj točki *Q*, u kojoj *q* siječe dodirnu izvodnicu *p*. Svaka dodirna ravnina ide vrhom stošca, jer i dodirna izvodnica sadržava vrh.



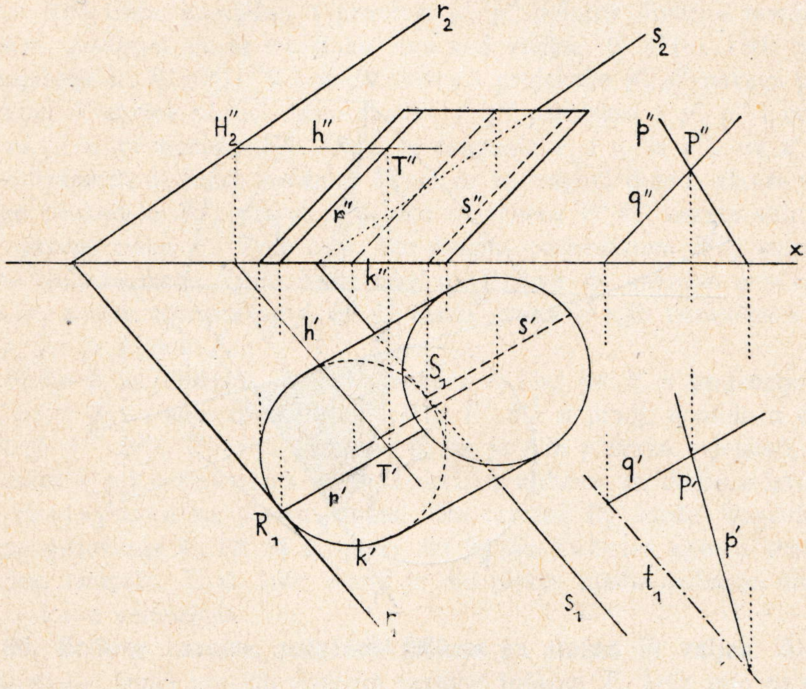
Sl. 178.

Posve istim načinom postaje i dodirna ravnina v a l j k a.

Budući da za svaki stožac ili valjak imamo neizmjerno mnogo dodirnih ravnina, jer svaka izvodnica može biti d o d i r n a za jednu takvu ravninu, vidi se, da se za neku tangencijalnu ravninu može postaviti i neki uvjet, koji ta ravnina treba da još zadovolji. Tako se na pr. može tražiti dodirna ravnina, koja ide nekom zadanom točkom izvan plašta, ili koja je paralelna sa zadanim pravcem u prostoru.

Neka dodirna ravnina τ uspravnoga kružnoga stošca ima dodirnu izvodnicu p, koja je priklonica ravnine τ. Projekcija izvodnice p na ravninu osnovke ide središtem S osnovke; prema tomu će projekcija SP, kao polumjer osnovke k, biti normalna na tragu t ravnine τ, koji je tangenta u P na k. Izlazi dakle, da je prikloni kut takve ravnine τ prema ravnini osnovke jednak priklonom kutu α izvodnicâ za pomenut stožac prema osnovnoj ravnini (isp. § **6.**, *1*).

83. Određenje dodirne ravnine u točki stošca. U slici 178. prikazane su obje projekcije kosoga stošca, kojemu je osnovka k u Π_2, a vrh mu je V. Na plaštu je zadana točka Q', Q'' određena s pomoću izvodnice p', p''.



Sl. 179.

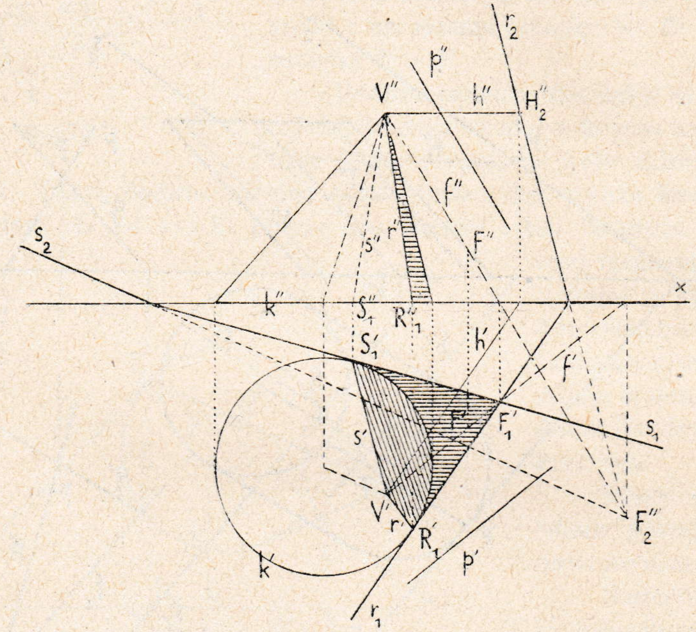
Trag t_2 dodirne ravnine τ (dakle trag na ravnini osnovke) bit će tangenta osnovke k'' u probodištu P''_2 izvodnice p. Kako ravnina τ mora ići vrhom, položit će se kroz V', V'' sutražnica s'', s' drugoga traga. Njezinim prvim probodištem S'_1 ići će traženi trag t_1 dodirne ravnine.

Kad bismo točkom Q u ravnini τ položili sve moguće zrake pramena, bila bi svaka zraka tangenta stošca u točki Q (gl. § **82.**). Obrnuto čine sve tangente oble površine, povučene u jednoj točki te površine, dodirnu ravninu, za koju će izabrana točka biti dirališe.

*

Kod valjka će postupak biti posve isti.

84. Dodirne ravnine valjka i stošca, paralelno sa zadanim pravcem. *1.* Neka bude zadan kosi valjak, kojemu je osnovka k u Π_1, a osim toga kojigod pravac p svojim projekcijama p', p'' (slika 179.). Da se na valjak položi tangencijalna ravnina, koja je paralelna s pravcem p, položit će se najprije pravcem p ravnina τ, koja je paralelna s izvodnicama valjka. Na p', p'' izabrat će se točka P', P'', a onda njom položiti paralela s izvodnicama; projekcije te paralele obilježene su s q', q''. Probodišta pravaca p i q na ravnini osnovke daju trag t_1 ravnine τ, a drugi njezin trag nije ni potreban za konstrukciju.



Sl. 180.

Paralelno s t_1 povući će se tangente r_1 i s_1 na k'; te su tangente prvi tragovi dviju ravnina, koje dotiču valjak i koje će biti paralelne s ravninom τ. Povučemo li diralištima R_1 i S_1 tangenata r_1 i s_1 izvodnice r i s valjka, bit će tragom r_1 i izvodnicom r određena jedna ravnina $\rho \parallel \tau$, a tragom s_1 i izvodnicom s druga ravnina $\sigma \parallel \tau$. Obje su ravnine ρ i σ tražene dvije dodirne ravnine, koje ispunjaju uvjet, da su paralelne s pravcem p. Budući da je naime $s_1 \parallel t_1$ i $s \parallel q$, bit će zaista $\sigma \parallel \tau$, a zato je i pravac p ravnine τ paralelan sa σ. Isto to vrijedi i za ravninu ρ.

Drugi tragovi r_2 i s_2 mogu se naći tako, da se potraže druga probodišta izvodnicâ r i s. U sl. 179. izabrana je na r točka T', T'', njome je

položena sutražnica h', h'' prvoga traga, i određeno njezino drugo probodište H''_2. Tim će probodištem prolaziti trag r_2 ravnine ρ, a trag je s_2 ravnine σ paralelan s r_2.

Ako se uzme, da je pravac p zraka svjetlosti, koja ima smjer odozgo prema dolje, bit će ρ i σ dvije ravnine svjetlosti. Njihove dodirne izvodnice r i s rastavljaju svijetli dio plašta od onoga, koji je u tami, pa se zovu rastavnice. Za uzeti smjer svjetlosti bit će u tami desni dio valjka, a dio ravnine Π_1 među tragovima r_1 i s_1, omeđen osim toga polukružnicom $R_1\,k'\,S_1$, bit će bačena sjena valjka, za koju bi još trebalo odrediti drugu među pogledom na sjenu gornje osnovke (gl. sl. 181.).

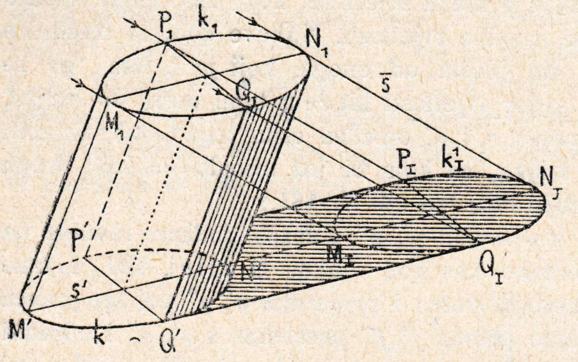
2. Ako treba paralelno s pravcem p', p'' položiti dodirne ravnine na stožac, postupat će se isto tako kao kod valjka. U slici 180. zadane su projekcije k', V'; k'', V'' kosoga stošca i projekcije p', p'' nekoga pravca p. Vrhom V stošca povući ćemo pravac f', f'' paralelno s p', p'' i odrediti njegovo prvo probodište F'_1. Obje su tangente r_1 i s_1 iz F'_1 na k' prvi tragovi traženih dodirnih ravnina. Drugi će se tragovi dobiti, ako se odredi i drugo probodište F''_2 pravca f, ili ako se vrhom $V'\,V''$ nacrta sutražnica h', h'' prvoga traga r_1. Trag će r_2 ići drugim probodištem H''_2 sutražnice h. Isto se tako može dobiti drugi trag s_2. Budući da ravnine $\sigma \equiv s_1$, s_2 i $\rho \equiv r_1$, r_2 sadržavaju pravac f, bit će zaista svaka od njih paralelna s pravcem p, jer je $f \parallel p$.

Spoje li se dirališta R_1 i S_1 tragova r_1 i s_1 na k' s projekcijom V' vrha, dobit će se obje izvodnice $V'\,R'_1$, $V'\,S'_1$ u prvoj, a onda u drugoj projekciji $V''\,R''_1$, $V''\,S''_1$. Uzmemo li, da je f ili p zraka svjetlosti, bit će obje ravnine ρ i σ ravnine svjetlosti, a njihove su dodirne izvodnice r i s rastavnice na plaštu stošca. Dio ravnine Π_1 među tragovima r_1 i s_1, pa osnovkom k', bit će u sjeni; taj je dio bačena sjena stošca za paralelnu rasvjetu. U sl. 180. manji je dio plašta među dodirnim izvodnicama r i s u samosjeni.

85. Dodirne ravnine, položene točkom na stožac ili valjak. Ako na zadani stožac treba položiti dodirne ravnine točkom F, koja nije na plaštu stošca (sl. 180.), spojit će se vrh V stošca s točkom F u pravac f. Dalje će se postupati posve jednako kao u § **84.**, *2.* Ako je mjesto stošca zadan valjak, povući će se točkom F paralela f s izvodnicama valjka, odredit će se probodište pravca f na ravnini osnovke, a onda će se nastaviti onako, kako je prikazano za stožac.

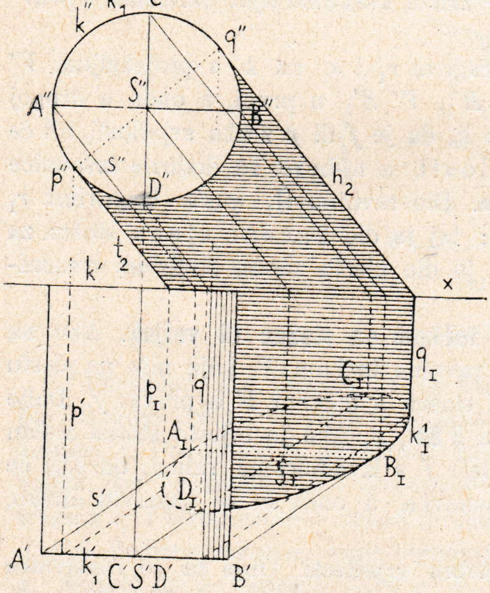
Točka se F može držati i izvorom svjetlosti. Obje će se rastavnice za taj slučaj dobiti posve onako, kao što je izvedeno u sl. 180. Samo će za položaj u sl. 180. biti u sjeni veći dio plašta među izvodnicama r i s, dakle onaj, koji je na protivnoj strani izvora svjetlosti F. Točka F'_1 ne će biti prava sjena vrha V.

86. Sjena valjka u kosoj i ortogonalnoj projekciji. *1.* Valjak je predočen u kosoj projekciji tako, da mu je osnovka k u ravnini xy; izvodnice su mu priklonjene prema ravnini osnovke za kojigod kut (slika 181.). Smjer svjetlosti zadan je kosom zrakom $\bar{s}$ i prvom projekcijom s' na Π_1. Taj je smjer s' izabran ujedno kao jedan od konjugiranih dijametara donje i gornje osnovke; drugi je konjugirani dijametar $P'\,Q'$ za k, a $P_1\,Q_1$ za k_1.



Sl. 181.

Sjena donje osnovke na ravninu xy identična je s osnovkom k. Sjena gornje osnovke k_1 na istu ravninu bit će elipsa $k^1{}_{\mathrm{I}}$, za koju će dva konjugirana dijametra $M_{\mathrm{I}}\,N_{\mathrm{I}}$, $P_{\mathrm{I}}\,Q_{\mathrm{I}}$ biti sjene konjugiranih dijametara $M_1\,N_1$, $P_1\,Q_1$. Budući da su oba dijametra gornje osnovke k_1 paralelna s osnovnom ravninom xy, imat ćemo $M_{\mathrm{I}}N_{\mathrm{I}} \parallel M_1\,N_1$ i $P_{\mathrm{I}}\,Q_{\mathrm{I}} \parallel P_1\,Q_1$, a ujedno $M_1\,M_{\mathrm{I}} \parallel N_1\,N_{\mathrm{I}}$ i t. d. Sve tri su elipse k, k_1 i $k^1{}_{\mathrm{I}}$ sukladne i jednako položene.



Sl. 182.

Za određenje sjene $k^1{}_{\mathrm{I}}$ mogu se izabrati i druga koja dva konjugirana dijametra osnovke k_1.

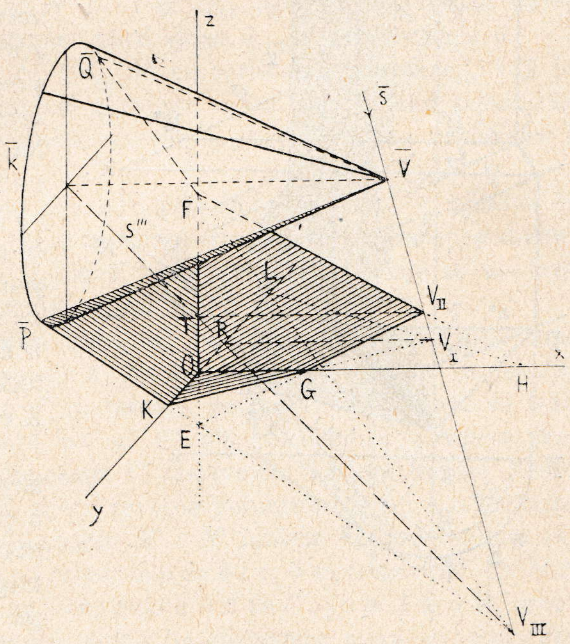
Povučemo li zajedničke vanjske tangente krivulja k i $k^1{}_{\mathrm{I}}$, dobit ćemo sjene $Q'\,Q_{\mathrm{I}}$ i $P'\,P_{\mathrm{I}}$ onih dviju izvodnica $Q'\,Q_1$, $P'\,P_1$ valjka, koje su rastavnice za smjer svjetlosti $\bar{s}$, s'. Iz slike 181. izlazi, da će od gornje osnovke k_1 samo luk $P_1\,N_1\,Q_1$ bacati pravu sjenu u luk $P_{\mathrm{I}}\,N_{\mathrm{I}}\,Q_{\mathrm{I}}$. Onaj dio plašta na valjku, koji je omeđen lukovima osnovaka $P'\;N'\;Q'$ i $P_1\,N_1\,Q_1$, pa rastavnicama $P'\,P_1$ i $Q'\,Q_1$, bit će okrenut od svjetlosti; taj je dio u samosjeni, od koje je u slici jedan dio nevidljiv. Kod paralelne je rasvjete polovina valjka u samosjeni.

Prema tumačenju o dodirnim ravninama (gl. § **84.**) bit će ovdje obje ravnine svjetlosti $P_I P' P_1$ i $Q_1 Q' Q_1$ ujedno dodirne ravnine za valjak, paralelne sa smjerom s, s', a dodirne su im izvodnice $P' P_1$, $Q' Q_1$.

2. Sjene uspravnoga valjka uz paralelnu rasvjetu prikazane su u ortogonalnoj projekciji u slici 182. Donja je osnovka k valjka u Π_2. Smjer svjetlosti zadan je projekcijama s', s''.

Gornja osnovka k_1 bacit će sjenu posve na ravninu Π_1. Sjena $k^1{}_I$ te osnovke odredit će se s pomoću sjenâ $A_I B_I$ i $C_I D_I$ dvaju normalnih premjera AB i CD gornje osnovke poznatim načinom (gl. na pr. § **44.**, 5.). Krivulja će $k^1{}_I$ biti elipsa.

Sjena donje osnovke k na Π_2 pada s tom istom krivuljom k zajedno u k'', a sjena gornje osnovke k_1 na Π_2 bila bi kružnica $k^1{}_{II}$. No tu kružnicu ne treba crtati, jer će zajedničke tangente t_2 i h_2 za k'' i $k^1{}_{II}$ biti i onako paralelne s projekcijom s'' zrake svjetlosti. Sjena će se valjka lomiti na osi x. U sjecištima $(t_2 x)$ i $(h_2 x)$ krenut će sjena prema elipsi $k^1{}_I$. Obje krajne izvodnice p_I i q_I bit će u sjeni tangente na $k^1{}_I$, a stajat će normalno na osi x. Te su naime krajne izvodnice u sjeni na Π_1 ujedno sjene rastavnicâ, t. j. izvodnicâ p i q na valjku, pa budući da su p i q pravci normalni na Π_2, bit će i njihove sjene p_I i q_I na Π_1 normalne na osi x.



Sl. 183.

Ravnine svjetlosti, koje dijele svijetli dio valjka od osjenjenoga, jesu dodirne ravnine valjka; njihovi su tragovi p_I, t_2 i q_I, h_2. Obje su te ravnine normalne na Π_2, jer se valjak uzdiže okomito na ravninu Π_2.

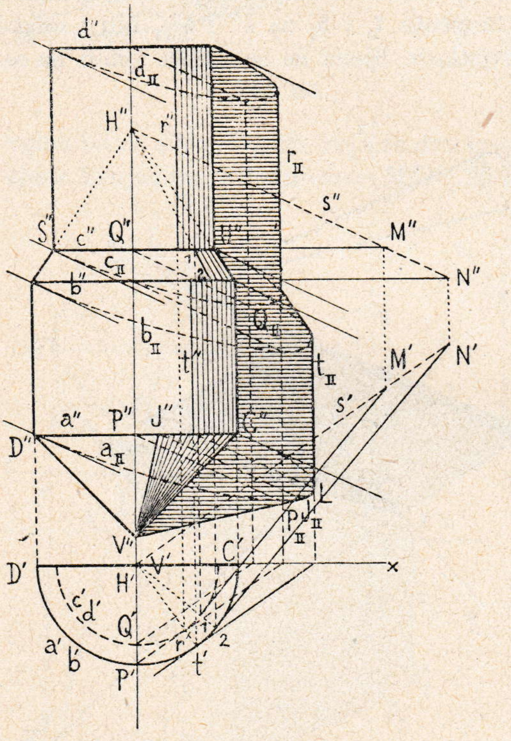
One dvije točke na $k^1{}_I$, u kojima tu krivulju dotiču tangente p_I i q_I, jesu sjene točaka gornje osnovke k_I, u kojima tu osnovku sijeku obje rastavnice p i q.

U prvoj je projekciji jedan dio sjene valjka zakriven prvom projekcijom plašta.

87. Sjena stošca u kosoj projekciji. Osnovka k uspravnoga kružnoga stošca (slika 183.) uzeta je u ravnini yz i predočena koso (prikr. $\frac{1}{2}$) poznatim načinom; jedan je dijametar elipse $\bar{k}$ paralelan sa z pa se prikazuje u pravoj veličini, a njemu konjugirani dijametar ima smjer osi y pa se prikraćuje na polovinu.

Zraka svjetlosti, položena vrhom V, ima kosu projekciju $\bar{s}$, a projekcija zrake s na yz bit će neki pravac s''' kroz središte osnovke, koje je ujedno treća projekcija vrha V.

Kad ne bi bilo ravninâ xy i xz, bila bi sjena vrha na $\Pi_3 \equiv yz$ točka $(s''' \bar{s}) \equiv V_{III}$, a bačena bi sjena stošca na Π_3 bila sadržana među osnovkom $\bar{k}$ i tangentama $V_{III} P$, $V_{III} Q$ na $\bar{k}$. Uzmemo li u obzir, da će se sjena lomiti na osi z i prijeći u ravninu xz, odredit ćemo sjenu V_{II} vrha V na tu ravninu. U točki $(s''', z) \equiv T$ povući ćemo normalu na z, pa će ona sjeći $\bar{s}$ u V_{II}. Tu ćemo sjenu spojiti s onim točkama E i F, u kojima kontura sjene na Π_3 siječe os z. Na $xz \equiv \Pi_2$ pao bi dakle trokutasti komad sjene $V_{II} E F$, kad ne bi bilo ravnine Π_1. No sjena će se lomiti i na osi x i na osi y u točkama G i K tako, da na $xy \equiv \Pi_1$ pada trokutasti dio sjene $O K G$. Sjena je vrha V na Π_1 točka V_I, kojom prolazi pravac $K G$. Zašto?



Sl. 184.

Dodirna ravnina stošca po izvodnici $V Q$ siječe ravninu Π_2 u pravcu $F V_{II}$, a ravninu Π_1 u pravcu $L V_I$. Oba su ta pravca tragovi pomenute dodirne ravnine, pa će zato imati svoju sjecišnu točku H na osi x. Druga dodirna ravnina stošca po izvodnici $V P$ ima svoj trag na Π_3 u pravcu $E K$, prvi trag u $K G$, a drugi trag u $G V_{II}$. Poradi toga se pravci $V_{II} E$ i $V_I K$ sijeku u točki G na x. Točke će se H i E upotrebiti kao kontrola za točno crtanje.

Bilješka. Ako se u sl. 183. pridrži kosa slika stošca i projekcija s''' zrake s, a mijenja se smjer $\bar{s}$ kroz $\bar{V}$, mijenjat će se sva tri dijela sjene na tri ravnine projekcija. Kako bi se morao izabrati smjer $\bar{s}$, da sjena stošca padne samo na Π_3 i Π_2?

88. Bačena sjena i samosjena tijela, koje je složeno od stožaca i valjaka. Za tijelo u sl. 176. određene su u slici 184. bačene sjene i samosjene. Smjer svjetlosti određen je projekcijama s', s''. Budući da se tijelo, koje je sastavljeno od polovina valjaka i stožaca, drži ravnine Π_2, polazit će sjena na Π_2 od druge projekcije tijela. Na tijelu ćemo obilježiti dvije jednake polukružnice (na donjem valjku) s a i b, a druge dvije jednake (manje) polukružnice na gornjem valjku s c i d. Polukružnice b i c pripadaju osnovkama prikraćenoga stošca, kojemu bi, kad bismo ga nadopunili, vrh bio u točki H. Napokon je a osnovka stošca, kojemu je vrh u V.

Sjena a_{II} polukružnice a bit će polovina elipse, za koju će D'' C'' biti jedan dijametar. Prednja točka P ima sjenu u P_{II}; pružac je P'' $P_{II} \parallel s''$ polovina dijametra, koji je dijametru C'' D'' konjugiran. Tangente na sjenu u C'' i D'' paralelne su sa smjerom zrake s''. Istim će se načinom dobiti i sjena b_{II} polukružnice b.

Sjena c_{II} polukružnice c dobit će se s pomoću prednje točke Q. Sjena će za tu točku biti Q_{II}; prušci S'' U'' i Q'' Q_{II} opet su konjugirani smjerovi za sjenu. Posve istim načinom izlazi sjena d_{II} za polukružnicu d.

Tangenta na obje sjene c_{II} i d_{II} bit će vertikalan pravac r_{II}, koji je sjena jedne izvodnice r (rastavnice) gornjega valjka. Isto će tako zajednička tangenta za a_{II} i b_{II} biti vertikalan pravac t_{II}, koji je sjena rastavnice t donjega valjka.

Polukružnice c i b bacaju sjene u poluelipse c_{II} i b_{II}, a njihova će zajednička tangenta biti sjena jedne izvodnice (rastavnice) prikraćenog stošca. Povuče li se još tangenta V'' J_{II} iz V'' na sjenu a_{II}, dobije se kontura bačene sjene cijeloga sastavljenoga tijela.

Za pojedine dijelove tijela treba još odrediti rastavnice. Položi li se na c' (ili d') tangenta paralelno s s', bit će u diralištu r' prva projekcija, a u ordinali druga projekcija r'' rastavnice gornjega valjka. Isto će tako biti u diralištu t' za tangentu na a' (ili b'), paralelnu s s', prva projekcija, a u ordinali druga projekcija t'' rastavnice donjega valjka. Zraka svjetlosti, povučena vrhom H, siječe ravnine polukružnicâ b i c u točkama N', N'' i M', M''. Prvim projekcijama M' i N' prolaze tragovi dodirne ravnine za prikraćen stožac, i to na ravninama za b i c; ti su tragovi M' $1 \parallel N'2$. Dirališta 1 i 2 daju u ordinalama točke 1 na c'' i 2 na b'', pa je 1 2 u Π_2 druga projekcija rastavnice za prikraćen stožac (ta rastavnica mora ići vrhom H).

Tangenta iz V'' na sjenu a_{II} ima dirалište J_{II}. Ta je tangenta $V''J_{II}$ sjena rastavnice VJ na Π_2 za stožac (a, V). Točka J'' na a'' dobit će se dakle tako, da se povuče J_{II} $J'' \parallel s''$.

Rastavnica t na donjem valjku može se dobiti sličnim načinom. Diralištem L tangente t_{II} na a_{II} povući će se paralela s s''; ona će sjeći a'' u točki, kojom prolazi t.

Bilješka. Vrijedno je opaziti, da se rastavnice r, 1 2, t i VJ u Π_2 ne će sastajati na c'', b'' i a''. Zato i bačena sjena ne će biti slomljena crta s pravčastim dijelovima, nego će biti sastavljena i od lukova, koji pripadaju elipsama a_{II}, b_{II} i d_{II}.

Zadaci za vježbu.

291.) Pružac je A (0, 3, 3) B (5, 6, 3) os uspravnoga kružnoga valjka, koji dotiče ravninu Π_1 duž jedne svoje izvodnice. Nacrtaj projekcije toga valjka i odredi njegove sjene na Π_1 i Π_2 uz paralelnu rasvjetu. Isp. zad. 278.

292.) U ravnini je Π_1 zadan pružac A' (1, 5, 0) V' (5, 1, 0), koji je prva projekcija jedne izvodnice uspravnoga kružnoga stošca, što mu je V vrh. Taj stožac dotiče Π_1 duž izvodnice AV. Polumjer je osnovke za stožac $r = 3$. Odredi sjene toga stošca na Π_1 za kojegod smjerove s', s''.

293.) Prikaži valjak u sl. 182. u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, $pr. \frac{1}{2}$), pa odredi sjene na xy i xz.

294.) Odredi sjene stošca u sl. 183. u ortogonalnoj projekciji na Π_1, Π_2 i Π_3 za paralelnu rasvjetu.

295.) Prikaži dodirnu ravninu stošca u sl. 178. u kosoj projekciji. Odredi projekciju vrha na xy i upotrebi sutražnicu kroz V.

296. Predoči stožac i njegovu sjenu na Π_1 u sl. 180. u kosoj projekciji.

297.) Okreni stožac u sl. 171. oko pravca $q \perp \Pi_2$ i odredi sjene na Π_1 i Π_2 za neki nov položaj.

298.) Odredi sjene valjka u sl. 174. na ravninu osnovke (za položaj poslije zakreta), i to za smjer svjetlosti od desno odozgo prema lijevo dolje.

299.) Prikaži sjenu uspravnoga valjka, kojemu je osnovka kružnica u Π_1, za zrake svjetlosti, paralelne s ravninom Π_2.

300.) Odredi na Π_1 i Π_2 sjene uspravnoga stošca, kojemu je osnovka kružnica u ravnini $\sigma \parallel \Pi_1$, a vrh u Π_1. Zraka svjetlosti ima projekcije s', s'', gdje je $\sphericalangle s'x = 45^0$, $\sphericalangle s''x = 45^0$.

301.) Odredi u sl. 184. rastavnicu VJ stošca (V, a) načinom, koji je istumačen u § **84.**, *2.* (sl. 180.).

302.) Odredi sve rastavnice za tijelo u sl. 184. izravno iz bačene sjene tijela.

303.) Nađi u sl. 184. najprije sve rastavnice, a onda traži bačene sjene tih rastavnica. Sjenu će trebati na tri mjesta nadopuniti lukovima elipsâ!

304.) Preokreni sliku 184., pa za tako obrnuto predočeno tijelo odredi sjene, koje neka padaju na desnu stranu za nov položaj.

Treći odsjek.

Ravni presjeci i prodori tračnih tjelesa.

I. Presjeci tjelesa ravninom. Mreže.

89. Općeni postupak za određenje presjekâ ravninama. Ako je zadana kojagod tračna površina: prizma, valjak, piramida ili štožac, koju treba presjeći ravninom σ i odrediti projekcije presjeka, postupat će se uopće tako, da se potraže probodišta pojedinih bridova ili izvodnica površine s ravninom σ.

Kod uglastih tjelesa odredit će se probodišta svih bridova sa σ, pa će se sva spojiti u slomljenu crtu, od koje će svaki komad biti na jednoj pobočki tijela. Kod oblih tračnih površina 2. reda (valjka i stošca) odredit će se probodišta s ravninom σ za toliko izvodnica, koliko je dovoljno, da se presječna krivulja može dalje potpuno konstruirati poznatim kojim načinom iz nauka o krivuljama (presjeci će biti krivulje 2. reda). Izabrat će se uopće takve četiri izvodnice, koje sa σ daju četiri krajne točke dvaju konjugiranih dijametara presječne krivulje.

Kad se traže probodišta bridova ili izvodnicâ s ravninom σ, može se postupati običnim načinom kao u § **43.**, ili se uvodi nova ravnina projekcija Π_3, na kojoj će se projekcija presjeka prikazati u osobito jednostavnom obliku (gl. na pr. transformaciju u sl. 187.).

Mjesto da se kod uglastih tjelesa traže probodište bridova sa σ, mogu se odrediti presječnice pobočaka s ravninom σ, i to ili običnim načinom, kako se određuje presječnica dviju ravnina, ili pak osobitim postupkom, koji je proveden u sl. 186.

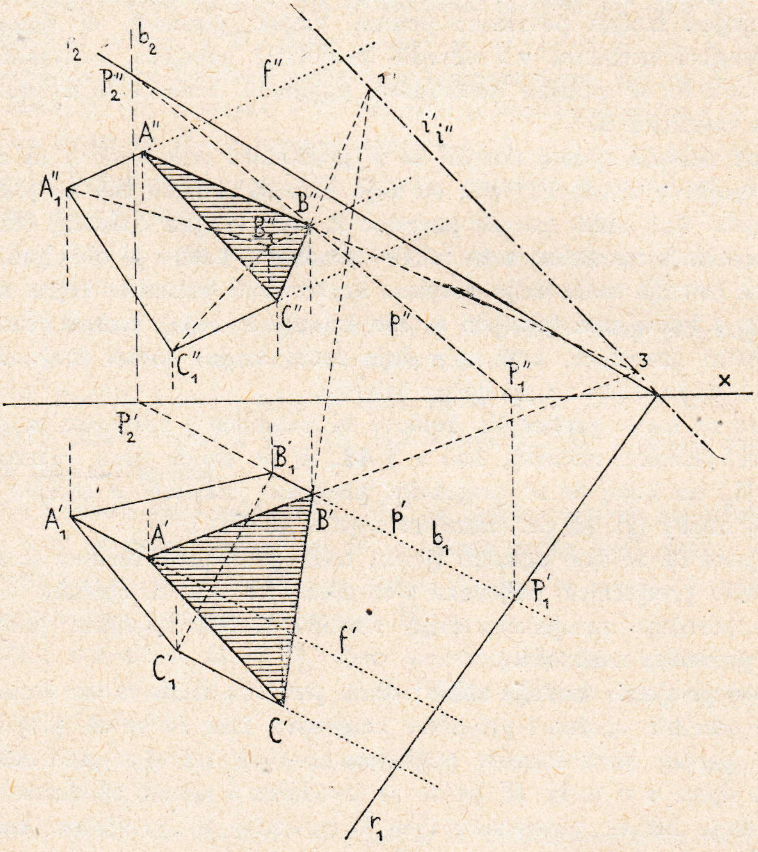
Kod presječne krivulje oblih tračnih površina može se za svaku točku krivulje odrediti ujedno i pripadna tangenta; time će se za projekcije te krivulje postići veća točnost pogledom na tijek krivulje. Ako neka izvodnica h siječe σ u točki H, pa se za izvodnicu h odredi dodirna ravnina χ površine, bit će presječnica $(\chi\sigma)$ tangenta na presječnu krivulju u točki H.

Bilješka. Postupak za određenje presjeka nekoga tijela bit će jednostavniji ili zamršeniji već prema tome, je li tijelo uspravno ili koso, a i prema tome, je li osnovka tijela u kojoj ravnini projekcijâ ili pak u kakvojgod zadanoj ravnini u prostoru.

90. Presjek prizme ravninom. *1.* Osnovka je neke kose trostrane prizme trokut $A_1 B_1 C_1$, položen u prostoru u općenom položaju prema Π_1 i Π_2 (slika 185.). Projekcije su za smjer paralelnih bridova f' i f''

izabrane po volji. Gornja osnovka prizme nije nacrtana. Prizma je presječena ravninom $\rho \equiv r_1, r_2$. Bridom, koji ide vrhom B_1 osnovke, položena je ravnina $\beta \equiv b_1, b_2$; ona stoji normalno na Π_1, zato joj je drugi trag $b_2 \perp x$.

Presječnica ravninâ ρ i β bit će pravac $p', p'' \equiv P'_1\, P'_2, P''_1\, P''_2$. Kako je pravac p u ravnini ρ pa u ravnini β, u kojoj je i brid prizme (koji ide vrhom B_1 osnovke), bit će na p probodište toga brida s ravninom ρ. Projekcija p'' siječe drugu projekciju pomenutoga brida u točki B'', a u ordinali će na prvoj projekciji brida biti B'. Točka je B', B'' traženo probodište.



Sl. 185.

Istim će se načinom odrediti probodišta A', A'' i C', C'' ostalih dvaju pobočnih bridova s ravninom ρ, pa je time određen presjek $A\,B\,C$ prizme ravninom ρ. U sl. 185. nije provedena konstrukcija za vrhove A i C.

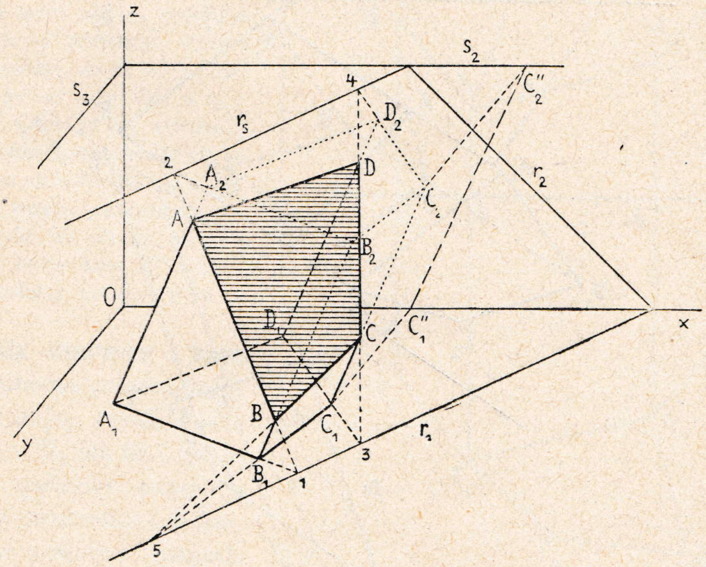
Za kontrolu, a i za određenje nekih vrhova presjeka, ako je taj presjek kakov mnogokut, moći će se upotrebiti os istovetnosti (identiteta) i', i'' (gl. § **53.**).

2. U slici 186. izvedeno je opet određenje presjeka neke kose prizme ravninom ρ, i to tako, da su se potražile presječnice pobočaka prizme ravninom $\rho \equiv r_1, r_2$.

U kosoj je projekciji s kakvomgod prikratom prikazana prizma, kojoj je osnovka nepravilan četverokut $A_1 B_1 C_1 D_1$ u xy; gornja je osnovka prizme $A_2 B_2 C_2 D_2$. Smjer bridova zadan je kosom projekcijom $C_1 C_2$ i drugom projekcijom $C''_1 C''_2$ toga brida. Zrake su $C_1 C''_1$ i $C_2 C''_2$ paralelne sa smjerom osi y. Budući da je prizma kakogod nagnuta prema xz, ne će uopće biti $C_1 C_2 \parallel C''_1 C''_2$.

Ravnina σ gornje osnovke paralelna je s xy; njezin će trag s_2 ići kroz C''_2 paralelno s x, a trag s_3 bit će paralelan sa smjerom y.

Ravnina ρ siječe tu ravninu σ u pravcu r_s (trag ravnine ρ na ravnini σ); taj će pravac r_s ići sjecištem tragova r_2 i s_2 pa će biti paralelan s r_1, jer ρ siječe paralelne ravnine Π_1 i σ u paralelnim pravcima r_1 i r_s.

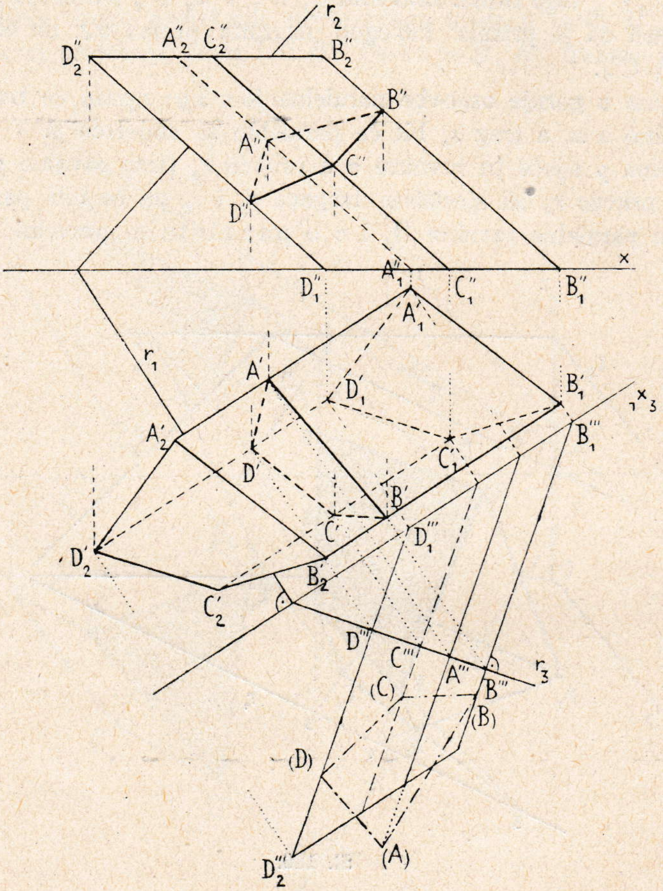


Sl. 186.

Da se odredi presječnica pobočke $A_1 B_1 B_2 A_2$ s ravninom ρ, produžit će $A_1 B_1$ do sjecišta 1 na r_1, a $A_2 B_2$ do sjecišta 2 na r_s. Pravac 1 2 bit će slika tražene presječnice, od koje dolazi u obzir samo onaj dio $A B$, koji je na omeđenoj pobočki $A_1 B_1 B_2 A_2$. Točka je naime 1 i u ravnini ρ i u ravnini te pobočke, a isto je tako točka 2 u ρ i na istoj pobočki. Spojnica je dakle 1 2 i na pobočki i u ravnini ρ, pa je zato tražena presječnica. Istim se načinom mogu odrediti i presječnice drugih pobočaka s ρ.

Brid $B_1\,C_1$ osnovke i stranica $B\,C$ presjeka u pobočki $B_1\,C_1,\,C_2\,B_2$ moraju se sjeći na r_1 (u točki 5). Tri ravnine Π_1, $B_1\,C_1\,C_2\,B_2$ i ρ sijeku se naime u točki (t. j. u 5), kojom moraju prolaziti sve tri presječnice $B_1\,C_1$, $B\,C$ i r_1 tih triju ravnina (gl. § **3.**, *15*). Pomenute tri ravnine čine piramidu 5, C, C_1, 3.

91. Određenje presjeka prizme transformacijom. Kosa prizma, kojoj je osnovka $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ u Π_1, a gornja joj je osnovka $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$, zadana je



Sl. 187.

svojim projekcijama u slici 187. Ravnina ρ, koja prizmu siječe, zadana je tragovima r_1 i r_2. Uvest ćemo treću ravninu projekcijâ Π_3, koja je okomita na tragu r_1, a siječe Π_1 u $_1x_3$, i odrediti treći trag r_3 ravnine ρ poznatim načinom, t. j. tako, da se odredi presječnica ravninâ ρ i $\Pi_3 \perp \Pi_1$, a onda ta presječnica r_3 preloži oko osi $_1x_3$ u Π_1. Ujedno ćemo naći treću projekciju prizme onako, kako je pokazano u sl. 83. i 84.

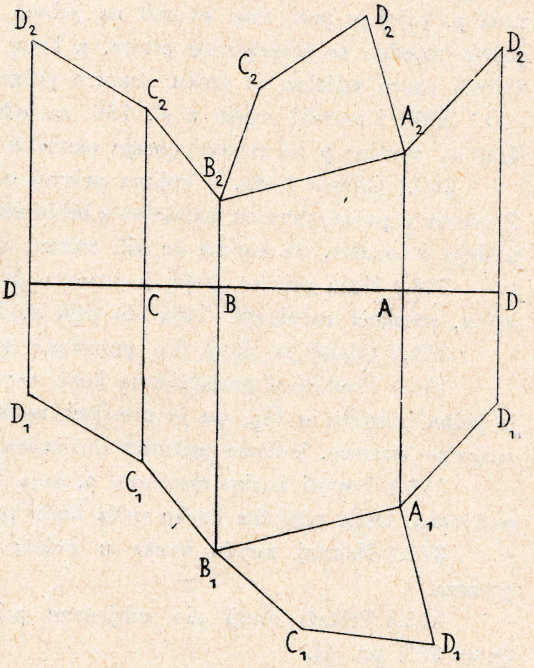
Ravnina će ρ biti normalna na Π_3, jer joj je trag r_1 normalan na ${}_1x_3$. Cijeli će se prerez prizme ravninom ρ prikazati na Π_3 kao dužina $D''' B'''$. Treće su projekcije za vrhove prereza točke A''', B''', C''', D'''. Ordinalama za ${}_1x_3$ dobiva se prva projekcija prereza A', B', C', D', a ordinalama za x iz prve projekcije druga projekcija prereza A'', B'', C'', D''.

Ravninu $\rho \equiv r_1, r_3$ možemo oko traga r_3 preklopiti zajedno s prerezom prizme u ravninu Π_3, dakle i u Π_1. Prerez će uzato doći u položaj $(A)(B)(C)(D)$, gdje je $A'''(A)$ daljina projekcije A' od osi ${}_1x_3$ i slično za ostala tri vrha.

U slici 187. uzeto je, da je ravnina ρ normalna na bridovima prizme; postupak za određenje prereza ostaje posve isti, ako ravnina ρ zauzme kojigod drugi položaj.

Bilješka. Budući da je u sl. 187. trag r_1 normalan na prvim projekcijama bridova prizme, a ujedno je ${}_1r_3 \perp r_1$, bit će nova os ${}_1x_3$ paralelna s bridovima u prvoj projekciji. Prizma je došla u taj položaj, da su joj bridovi paralelni s π_3, pa se zato vide u π_3 u pravoj veličini. Kako jo pak ravnina ρ normalna na bridovima prizme, bit će trag r_3 normalan na bridovima u π_3, pa se zato taj trag mogao jednostavno nacrtati. Poradi svih tih odnosa bit će i preložaj (A) na bridu kroz A''' i t. d., što za općeni položaj ravnine ρ ne će uopće biti.

92. Mreža uspravne i kose prizme. Za uspravnu prizmu, kojoj je osnovka u kojoj ravnini projekcijâ, na pr. u Π_2 (sl. 68.), može se za svaku pobočku odmjeriti prava veličina osnovnice i visine. Sve će se te pobočke nanizati jedna do druge u ravninu crtnje, pa će im se dodati i obje osnovke prizme. Tako je određena mreža uspravne prizme. Sličnim se načinom dobiva mreža uspravne prizme, kojoj je osnovka u kakvojgod ravnini σ.



Sl. 188.

Ako je prizma kosa kao u sl. 187., prerezat ćemo je ravninom ρ, koja je normalna na bridovima, a prerez ćemo uzeti kao da je osnovka za gornji i donji dio prizme, koji je nastao prerezom. Razastremo li prizmu u ravninu, prijeći će prerez $ABCD$ u pravac (slika 188.). Pojedine dužine stranica DC, CB, BA, AD vidimo u pravoj veličini u sl. 187. na

preložaju $(A)(B)(C)(D)$. Budući da je ravnina prereza normalna na bridovima, povući ćemo u sl. 188. u točkama D, C, B, A, D normale na $D D$ i od točaka D, C, B, A, D odmjeriti gore i dolje dotične prave dužine na pripadnim bridovima, koje izlaze iz treće projekcije u sl. 187. Tako će biti $D D_2 = D''' D'''_2$, a $D D_1 = D''' D'''_1$ u sl. 187. i t. d.

Time se dobila mreža plašta, kojoj će se dodati još obje osnovke prizme. Pojedine stranice osnovke mogu se mjeriti na preloženom plaštu: $D_1 C_1$, $C_1 B_1$, $B_1 A_1$, $A_1 D_1$ ili na osnovci prizme u Π_1.

Zadaci za vježbu.

305.) Uspravnu kvadratičnu prizmu, kojoj je osnovka u Π_1, prereži ravninom ρ, kojoj je prvi trag okomit na jednoj dijagonali osnovke. Nacrtaj mrežu plašta zajedno sa slomljenom crtom, u koju prelazi prerez, kad se plašt razvije. Odredi pravu veličinu za svaku stranicu prereza!

306.) Upotrebi način u sl. 186. za određenje presjeka prizme u sl. 187. Trag r_s ravnine ρ na ravnini gornje osnovke bit će sutražnica ravnine ρ.

307.) Odredi točke, u kojima prizmu u sl. 185. siječe zadan pravac p', p''. Pravcem p položi ravninu paralelno s bridovima prizme. Ta će ravnina sjeći prizmu u dvije izvodnice, na kojima će biti tražena dva probodišta. Isp. § **22.**

308.) Kosu prizmu, kojoj je osnovka u Π_1, a bridovi su joj normalni prema osi x, presijeci ravninom, koja ide osju x. Upotrebi pobočnu projekciju na Π_3.

309.) Odredi za donji dio prerezane prizme u sl. 186. sjene na xy i xz.

310.) Predoči u projekcijama kosu nepravilnu četverostranu prizmu, kojoj je jedna pobočka u Π_1, pa je presijeci ravninom ρ tako, da presjek ima dvije susjedne stranice, jednake zadanim dužinama d_1 i d_2.

311.) Prereži kocku ravninom ρ, koja ide središtem kocke i siječe svih šest pobočaka. Dvije pobočke kocke neka budu paralelne s Π_1.

312.) Nacrtaj mrežu kocke u zadatku 311. zajedno s presječnom crtom prereza.

313.) Prikaži donji dio odsječene prizme u sl. 185. u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, $pr.\ \frac{1}{2}$).

314.) Odredi obje normale projekcije za prizmu u sl. 186., ako je u kosoj projekciji bila uzeta prikrala $\frac{1}{2}$, i nacrtaj mrežu prizme.

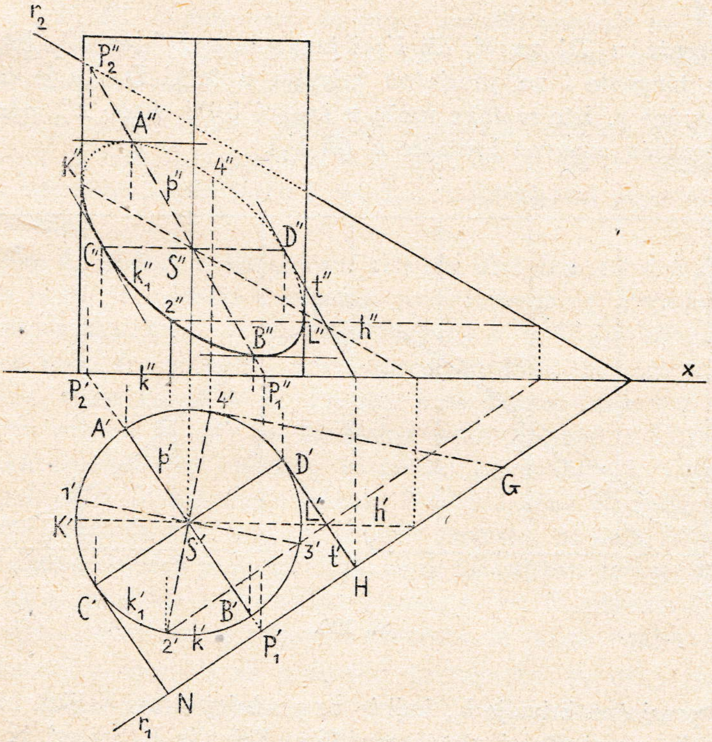
315.) Odredi sjene odsječenoga donjega dijela prizme u sl. 185. Π_1 i Π_2.

316.) Prikaži u kosoj projekciji pravilnu šestostranu prizmu (osnovka u xy), i odredi presjek te prizme s ravninom, koja sve tri osi siječe u jednakim daljinama od ishodišta O.

317. Osnovka je pravilne trostrane prizme u ravnini σ (—3, 4, 5). Odredi projekcije za prerez te prizme s ravninom, koja ima isti prvi trag kao i ravnina σ, a ide još točkom T (—4·5, 0, 4).

93. Presjek uspravnoga valjka ravninom. Uspravni kružni valjak, kojemu je osnovka u ravnini Π_1 (slika 189.), presječen je ravninom ρ. Presječnu krivulju k_1 treba odrediti dostatnom točnošću.

Da će presječna krivulja k_1 biti elipsa, vidi se već odatle, što će ona biti krivulja drugoga reda, jer će svaki pravac ravnine ρ sjeći valjak u dvije točke na k_1, na pr. pravac p', p'' u točkama A', A'' i B', B''. Osim toga je krivulja k_1 zatvorena, jer ravnina ρ siječe sve izvodnice valjka u konačnim točkama. Budući da je ravnina ρ nagnuta prema Π_1, ne će sjeći valjka u kružnici. Presječna će dakle krivulja biti elipsa. Mnogo će se strože to pokazati kasnije u § 136.



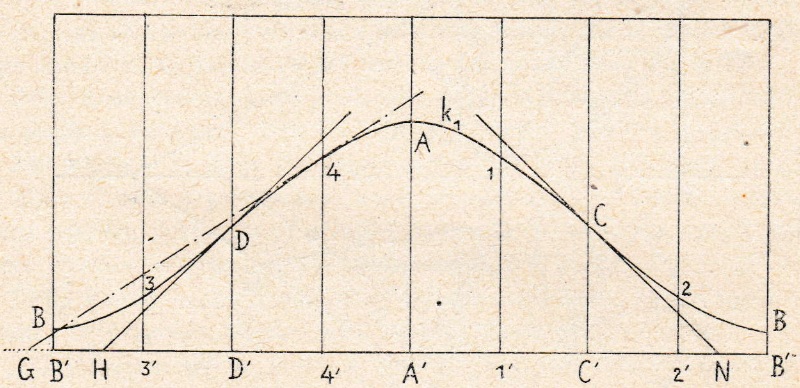
Sl. 189.

Možemo uzeti u obzir i to, da se presječna krivulja k_1 dade shvatiti kao sjena gornje osnovke valjka na ravninu ρ za paralelne zrake svjetlosti, koje su ujedno izvodnice valjka. Takva će pak sjena biti elipsa (isp. § **74.**).

Mjesto da se traže probodišta pojedinih izvodnica valjka s ρ, povući će se za osnovku k' dva normalna dijametra $A'B' \perp r_1$ i $C'D' \parallel r_1$, a onda će se odrediti probodišta ravnine ρ s onim izvodnicama valjka, koje

idu krajnim točkama A', B', C' i D' dijametara na osnovci. Pravac je $A'B'$ projekcija pravca p ravnine ρ; na drugoj će projekciji p'' biti u ordinalama obje točke A'' i B'', koje su krajne točke dijametra za projekciju k''_1. Sredina S' na $A'B'$ bit će prva projekcija za središte presjeka, a druga je projekcija S'' sredina prušca $A''B''$. Točka je S na osi valjka. Dijametar je $C'D' \parallel r_1$, druga će dakle projekcija $C''D''$ ići središtem S'' paralelno s osi x. Budući da je $A'B' \perp C'D'$ za osnovnu kružnicu, bit će $A''B''$ i $C''D''$ konjugirani dijametri za drugu projekciju presjeka k_1. Elipsa k''_1 može se dakle točno nacrtati s pomoću tih konjugiranih dijametara (gl. § **73.**). Za točku $2'$ na k'_1 izlazi $2''$ s pomoću sutražnice za ρ i t. d.

Tangenta u D' na k'_1 (ili k') i tangenta u D'' na k''_1 bit će obje projekcije tangente t na presječnu krivulju u točki D. Ta je tangenta t pravac ravnine ρ. Isto se tako može u svakoj točki elipse k''_1 odrediti tangenta s pomoću osnovne kružnice k' (ili k'_1).



Sl. 190.

Dio presječne krivulje k_1, koji je na prednjoj strani valjka, bit će u Π_2 vidljiv, a dio na stražnjoj strani nevidljiv. Krivulja k_1 prelazi iz vidljivoga dijela u nevidljivi u onim dvjema točkama K i L, u kojima granične izvodnice valjka za Π_2 sijeku ravninu ρ. Obje točke K i L spojene daju pravac h, za koji je prva projekcija $h' \parallel x$, a druga je projekcija $h'' \parallel r_2$. Pravac h ide središtem S presječne krivulje. Projekcija h'' daje na graničnim izvodnicama obje tražene granične točke K'' i L'' za drugu projekciju. Prava će se veličina presječne elipse k_1 naći tako, da se odredi prava veličina dijametra AB; dijametar se CD prikazuje u pravoj veličini u projekciji $C'D'$. Budući da je ravnina, položena po osi valjda normalno

na ρ, ravnina simetrije za valjak, na kojoj dijametar CD stoji normalno, bit će AB i CD za pravu veličinu presječne elipse obje osi njezine.

94. Mreža uspravnoga valjka zajedno s presječnom crtom. U sl. 189. povući ćemo dva normalna dijametra $1'3'$ i $2'4'$, koji su položeni simetrično prema $A'B'$. Točkama je A', $1'$, C', $2'$, B' $3'$, D' $4'$, A' osnovka valjka podijeljena na osam jednakih dijelova. Zamislimo u svakoj toj točki položenu izvodnicu valjka. Po izvodnici točke B' razrezat ćemo plašt pa ćemo ga razastrti u ravninu (slika 190.). Osnovka će k' prijeći u pružac $B'B'$, koji se dobiva, ako se kružnica k' rektificira poznatim načinom. Dužina $B'B'$, podijeljena na osam jednakih dijelova, daje točke $3'$, D', $4'$, A', $1'$, C', $2'$, B'. U tim ćemo točkama položiti normale na $B'B'$ i na njih prenijeti visinu valjka iz sl. 189. Tim je prikazana mreža plašta zajedno s pomenutih osam izvodnica.

Da se u mrežu unese i presječna krivulja k_1, izmjerit će se u sl. 189. visina točke A nad Π_1 i prenijeti u sl. 190. od A' do A. Istim će se postupkom odrediti i ostale točke 1, C, 2, . . . krivulje na pojedinim izvodnicama u mreži.

Elipsa k_1 prelazi u simetričnu krivulju $B\,3\,D\,4\,A\,1\,C\,2\,B$ u mreži. Tangenta je na pr. u točki 4 elipse k_1 pravac ravnine ρ. Prva je projekcija te tangente pružac $4'G$ na tangenti osnovke k' u $4'$ (sl. 189.). Tangenta je dakle u točki 4 hipotenuza pravokutnoga trokuta, kojemu je jedna kateta $4\,4'$, a druga kateta $4'G$. Prenese li se prema tome u sl. 190. $4'G$ na osnovni pravac $B'B'$, pa se krajna točka G spoji s 4, bit će $4\,G$ tangenta na razastrtu elipsu k_1 (u mreži) za diralište 4. Učini li se to isto za točke C i D, s pomoću trokutā $C\,C'N$ i $D\,D'H$, dobit će se obje tangente u C i D, koje imaju to osobito svojstvo, da se krivulje k_1 u tim točkama dotiču i ujedno je sijeku. Takove se točke zovu točke infleksije, a pripadne su tangente infleksione tangente. U točkama C i D prelazi krivulja s jedne strane pripadne tangente na drugu stranu.

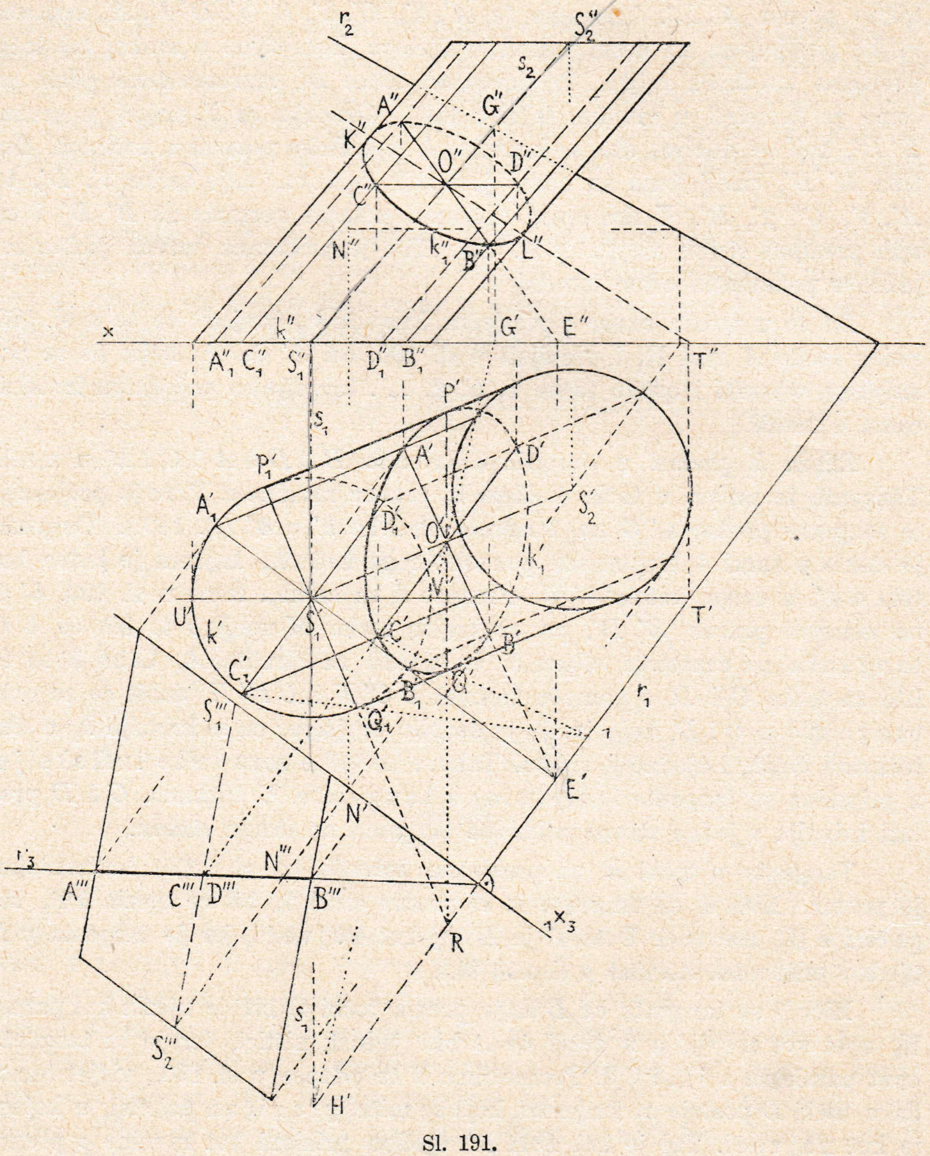
Tangenta u točki B na presječnu krivulju (gl. sl. 189.) horizontalan je pravac. Miče li se tangenta iz B prema točki 3, bit će njezin kut, što ga čini s Π_1, sve veći. U točki je D taj kut najveći, jer je tangenta u D ujedno priklonica ravnine ρ (isp. § **14.**).

Miče li se tangenta od D dalje prema točki 4, bit će njezin kut prema Π_1 opet sve manji, a u točki će A biti jednak ništici, jer je tu tangneta opet paralelna s Π_1, i t. d. Promotrimo li te odnose u sl. 190., vidjet ćemo, da u točki D postaje za tangentu, koja se miče, graničan položaj, u kojem je kut najveći. Taj je kut DHD' ujedno prikloni kut ravnine ρ prema Π_1. U točkama 3 i 4 bit će kut tangente prema $B'B'$ manji od $\sphericalangle DHD'$.

*

Bilješka. Francuski je geometar Olivier dokazao, da će takvi granični položaji (infleksije) u mrežama valjaka i stožaca postati za one točke presječne krivulje s nekom ravninom ρ, u kojima je tangencijalna ravnina površine normalna na presječnoj ravnini ρ, a da ravnina ρ nije ujedno normalna na pripadnoj izvodnici.

Takve su točke u sl. 189. zaista točke *C* i *D*.



Sl. 191.

Iz mreže u sl. 190. izlazi i to, da je *A* najviša, a *B* najniža točka presječne krivulje. U takvim su točkama tangente na presječnu krivulju

horizontalne. Budući da je cijela krivulja sadržana sasvim između te dvije horizontalne tangente, ne može nijedna njezina točka biti viša nad diralištem gornje tangente, a ujedno nijedna niža ispod dirališta donje tangente.

95. Presjek kosoga valjka ravninom. Kosi valjak, kojemu je osnovka k u Π_1, a os $S_1 S_2$, zadan je svojim projekcijama; ravnina ρ, koja ga siječe, određena je svojim tragovima r_1 i r_2 (slika 191.),

Izabrat ćemo dva normalna premjera $A'_1 B'_1$ i $C'_1 D'_1$ osnovke k valjka tako, da bude $A'_1 B'_1 \perp r_1$, dakle $C'_1 D'_1 \parallel r_1$. Izvodnice valjka u krajnim točkama tih dijametara sjeći će ravninu ρ u točkama A, B, C i D, pa će biti AB i CD par konjugiranih dijametara za presječnu krivulju k_1 (gl. § **71.**). Njihovo je sjecište O na osi valjka pa će biti ujedno središte za k_1. Odredit ćemo prije svega točku O kao probodište osi valjka s ravninom ρ. Položit ćemo osju ravninu σ, kojoj drugi trag s_2 pada u drugu projekciju $S''_1 S''_2$ osi, a prvi joj je trag s_1 normalan na x. Presječnica ravninâ σ i ρ ima prvu projekciju $G' H'$, koja na $S'_1 S'_2$ određuje prvu projekciju O' traženoga središta; druga je projekcija O'' u ordinali na $S''_1 S''_2$.

Ravnina, položena dijametrom $A'_1 B'_1$ osnovke k' i osju valjka, sjeći će ravninu ρ u dijametru AB presječne krivulje (§ **74.**). Budući da će se pravci $A'_1 B'_1$ i $A' B'$ sjeći u točki E' traga r_1, odredit ćemo najprije E' na r_1, a onda ćemo povući $E' O'$. Taj će pravac odrediti na izvodnicama, koje idu kroz A'_1 i B'_1, obje krajne točke A' i B' dijametra za k'_1. Druge će projekcije A'' i B'' biti na $O'' E''$. Budući da je $C'_1 D'_1 \parallel r_1$, sjeći će ravnina, položena dijametrom $C'_1 D'_1$ i osju valjka, ravninu ρ u pravcu, koji ide kroz O te je paralelan s r_1. Krajne će se točke toga dijametra za Π_1 dobiti u sjecištima C' i D' s izvodnicama valjka, koje idu točkama C'_1 i D'_1 osnovke. Druga projekcija $C'' D''$ ide točkom O'' paralelno s osi x.

Obje projekcije k'_1 i k''_1 presječne elipse moći će se sad konstruirati poznatim načinom, jer su za svaku određena dva konjugirana dijametra.

Elipsa će k'_1 doticati granične (konturne) izvodnice valjka u točkama P' i Q'. Spojnica je $P' Q'$ dijametar elipse k'_1, jer su pomenute granične izvodnice paralelne tangente te elipse. Dijametar $P' Q'$ elipse k'_1 i dijametar $P'_1 Q'_1$ osnovke k', koji spaja dirališta graničnih izvodnica na osnovci, sjeći će se u točki R na r_1. Odredi li se dakle najprije R, a onda spoji R s O', dobit će se obje točke P' i Q', u kojima elipsa k'_1 prelazi iz vidljivoga dijela valjka u nevidljivi dio za Π_1.

Slično se tako mogu dobiti točke K i L za elipsu k''_1, u kojima ona dotiče granične izvodnice u Π_2. Probodišta tih izvodnica na Π_1 jesu točke U' i V' osnovke k'. Dijametar $U' V'$ sjeći će trag r_1 u točki T'; ta će točka biti probodište (na ravnini Π_1) onoga dijametra KL elipse k_1, koji je spojnica dirališta K i L te elipse s graničnim izvodnicama u Π_2.

Povučemo li dakle $T'' O''$, dobit ćemo obje točke K'' i L'' na graničnim izvodnicama.

Iz sl. 191. izlazi, da je A najviša, a B najniža točka presjeka, jer su tangente presječne elipse u tim točkama paralelne s $C' D'$, dakle i s Π_1.

Cijelo se određenje presjeka k_1 može provesti i s pomoću treće projekcije na Π_3, koja siječe Π_1 u novoj osi ${}_1x_3 \perp r_1$. Treća će se projekcija valjka dobiti poznatim načinom. Uzmemo li na ${}_1x_3$ neku točku N' i odredimo za nju N'' s pomoću sutražnice tako, da je točka N u ravnini ρ, imat će N'' nad Π_1 istu visinu, kao što mora biti udaljenost $N' N'''$. Treći trag r_3 ići će točkom N''' i sjecištem $(r_1, {}_1x_3)$; on nije drugo nego preložena priklonica u točki N ravnine ρ za trag r_1.

Presjek ravnine ρ s valjkom prikazuje se na Π_3 kao pružac $A''' B'''$. Sredina je toga prušca $C''' \equiv D'''$ projekcija dijametra CD za presječnu elipsu, jer je taj dijametar normalan na Π_3. Ordinalama za ${}_1x_3$ i za x dobit će se prve i druge projekcije točaka A, B, C i D na elipsi k_1.

Bilješka. Pravac $T'' O''$ u sl. 191. nije paralelan s tragom r_2, jer pravac $U' T'$, ma da je paralelan s osi x, nije pravac ravnine ρ (sutražnica) nego ravnine Π_1, budući da je on dijametar osnovke k', koja je u Π_1! Odredi pravac $K' L'$.

Da se odredi mreža kosoga valjka, postupat će se istim načinom kao kod kose prizme (gl. § **92.**). Položit će se ravnina ρ okomito na izvodnice valjka. Taj će presjek ravnine ρ i valjka biti elipsa, koja će prijeći u pravac, kad se plašt valjka razvije u ravninu. Kontura donje i gornje osnovke valjka (koje su kružnice) prijeći će kod razvijanja u ravninu u dvije nepravilne krivulje, koje će imati po dvije infleksije na izvodnicama, što prolaze kroz P'_1 i Q'_1. Zašto?

Zadaci za vježbu.

318.) Prikaži valjak i njegov presjek u sl. 189. u kosoj projekciji.

319.) Odredi presjek valjka u sl. 189. transformacijom. Uzmi ravninu $\Pi_3 \perp r_1$ kroz os valjka.

320.) Prereži valjak u sl. 191. ravninom, koja je normalna na osi valjka, pa nacrtaj mrežu valjka zajedno s presječnom krivuljom.

321.) Prereži kosi valjak, kojemu je osnovka u Π_2, ravninom $\rho \perp \Pi_1$, i odredi par konjugiranih dijametara za drugu projekciju presjeka.

322.) Prereži uspravni valjak, kojemu je osnovka u Π_1, ravninom σ, položenom osju x. Upotrebi pobočnu projekciju na Π_3. Odredi osi za 2. projekciju presjeka.

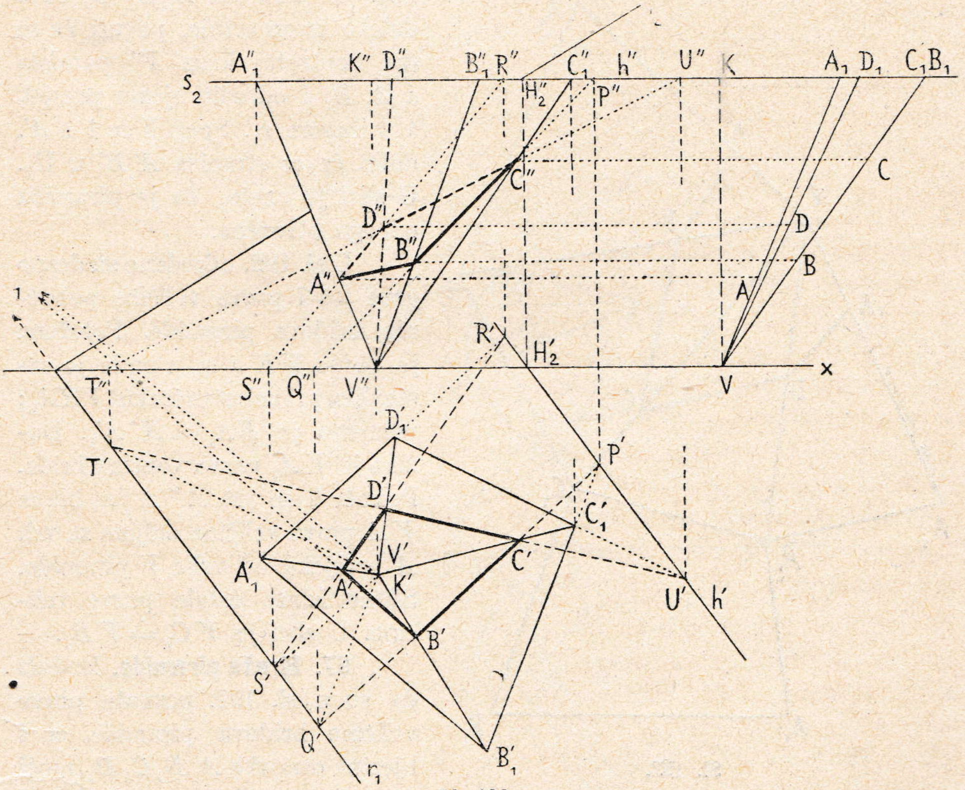
323.) Uspravni valjak, kojemu je os paralelna s osi x u udaljenostima 4 i 5 od Π_1 i Π_2 (polumjer $r = 2{\cdot}5$), prereži ravninom σ (—4, 3, 4).

324.) Odredi točke, u kojima pravac p', p'' siječe valjak. Osnovka je valjka u Π_1, izvodnice su mu prema Π_1 priklonjene pod kutom 45^0. Položi pravcem

p ravninu ρ paralelno s izvodnicama (§ **84.**); ravnina će ρ sjeći valjak u dvije izvodnice, na kojima su tražena probodišta.

325.) Osnovka je uspravnoga kružnoga valjka u ravnini μ (4, 4, 3); prereži valjak ravninom σ (3, 5, 5·5).

96. Presjek piramide ravninom. Piramida $V(A_1 B_1 C_1 D_1)$, kojoj je osnovka nepravilan četverokut u ravnini $\sigma \parallel \Pi_1$, a vrh V u Π_1 (slika 192.), presječena je ravninom $\rho \equiv r_1, r_2$. Da se odrede vrhovi presječnoga četverokuta $ABCD$, mogu se tražiti probodišta pojedinih pobočnih bridova pira-

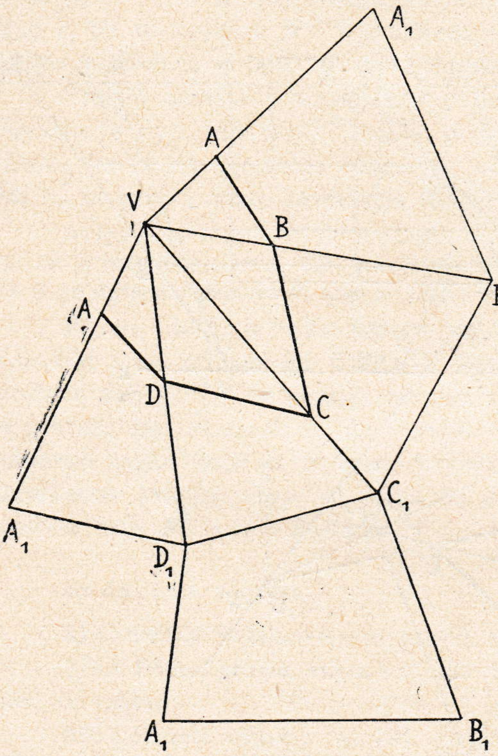


Sl. 192.

mide s ravninom ρ (kao u § **90.**, *1* za prizmu), ili se mogu odrediti presječnice pojedinih pobočaka piramide s ravninom ρ (kao kod prizme u § **90.**, *2*). U sl. 192. upotrebljen je taj drugi način.

Ravnina σ osnovke siječe ravninu ρ u pravcu (sutražnici) h. Brid $B_1 C_1$ osnovke sjeći će h u točki P; trag pobočke $VB_1 C_1$ na Π_1 ići će vrhom V pa će biti paralelan s $B_1 C_1$, jer je $\sigma \parallel \Pi_1$. Taj trag $V'Q'$ siječe r_1 u točki Q'.

Spojnica je $P' Q'$ prva projekcija presječnice za pobočku $V B_1 C_1$ i za ravninu ρ; od te se presječnice nalazi na pobočki $V B_1 C_1$ komad $B C$ tako, da je $B' C'$ prva projekcija jedne stranice traženoga presjeka. Druga se projekcija $B'' C''$ dobiva ordinalama. Za kontrolu točnosti bit će dobro, da se cijela presječnica $P Q$ predoči u Π_2. Točka Q ima drugu projekciju Q'' u osi x; druga je projekcija P'' točke P na $h'' \equiv s_2$. Stranica $B'' C''$ bit će u Π_2 na projekciji $P'' Q''$ presječnice $P Q$. Posve istim načinom dobit će se i ostale stranice presjeka. Stranica je $A B$ nacrtana najposlije. Budući da stranica $A_1 B_1$ siječe h daleko izvan crtnje, povući će se (za kontrolu) kroz V' paralela s $A_1 B_1$ i odrediti njezin presjek 1 s tragom r_1. Spoji li se 1 s A', dobit će se stranica $A' B'$ u Π_1. U slici je uzeto, da je piramida odozgo otvorena.



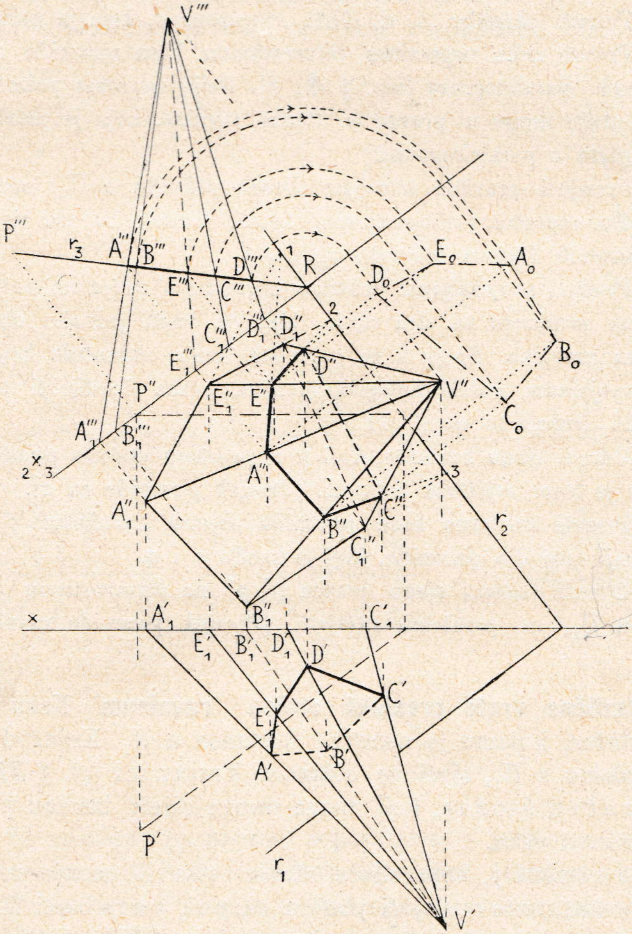
Sl. 193.

U sl. 192. određene su desno gore još i prave veličine pobočnih bridova piramide. Položena je visina $V K \perp x$, a onda je sastavljen pravokutan trokut $V K A_1$; učinjeno je $K A_1 = K' A'_1$. Dužina je $V A_1$ prava veličina brida. Povuče li se još $A'' A \parallel x$, bit će $V A$ prava veličina daljine za vrh A presjeka od vrha V piramide. Slično izlaze ostale prave veličine. U slici je $V C_1 = V B_1$.

97. Mreža piramide. Budući da su u sl. 192. poznate prave veličine bridova piramide, a i njezina osnovka $A_1 B_1 C_1 D_1$, moći će se nacrtati sve pobočke i osnovka u pravoj veličini (slika 193.) tako, da je piramida razrezana po bridu $V A_1$ i razastrta u ravninu. Zajedno s plaštem razastrt je i prerez $A B C D$, gdje je $V A$ daljina, određena u sl. 192. i t. d.

98. Presjek piramide ravninom uz pomoć transformacije. Kao i kod prizme (gl. § 91.) može se upotrebiti treća projekcija, gdje je nova ravnina Π_3 normalna na presječnoj ravnini ρ. U slici 194. prikazane su dvije projekcije piramide $V(A_1 B_1 C_1 D_1 E_1)$ i presječna ravnina ρ tragovima r_1 i r_2. Izabrana je os ${}_2x_3 \perp r_2$ i nacrtana treća projekcija piramide; daljina

je vrha V''' od ${}_2x_3$ jednaka daljini točke V' od x. Budući da Π_3 siječe ρ u priklonici, odredit će se s pomoću točke P ravnine ρ, gdje je P'' na ${}_2x_3$, preložena priklonica RP''', koja je ujedno treći trag r_3 ravnine ρ. Prerez piramide ravninom ρ prikazuje se na Π_3 kao p r u ž a c. Pojedini će se vrhovi A''', B''' . . . . . E''' projicirati ordinalama u drugu projekciju u A'', B''. . . E'',



Sl. 194.

a odatle izlazi A', B', . . . E'. Kao kontrola točnosti upotrebit će se u Π_2 točke 1, 2, 3, . . . na r_2, gdje će se $A''_1\,E''_1$ i $A''\,E''$ sjeći u 1, i t. d.

U slici je još određena i prava veličina presjeka: $A_0\,B_0\,C_0\,D_0\,E_0$ tako, da se ravnina r_2, r_3 okrenula oko r_2 u Π_2.

Zadaci za vježbu.

326.) Nađi probodišta pravca p', p'' s piramidom, kojoj je osnovka trapez u Π_1 (isp. § **16.** i **22.**).

327.) Presijeci pravilnu peterostranu piramidu, kojoj je osnovka u Π_1, ravninom sumjerenosti i nacrtaj mrežu. Upotrebi pobočnu projekciju Π_3.

328.) Izvedi sliku 192. u kosoj projekciji ($\alpha = 45^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$).

329.) Prereži oktaedar u sl. 152. ravninom σ, koja je paralelna s osi x,

330.) Prereži neku nepravilnu četverostranu kosu piramidu ravninom tako, da presjek bude paralelogram (isp. § **4.**, *8*). Dvije suprotne pobočke sjeći će se u pravcu m, dvije druge u pravcu n. Svaka ravnina, koja je paralelna s m i n, sjeći će piramidu u paralelogramu.

331.) Presijeci pravilan tetraedar (jedna pobočka u Π_1) ravninom, koja je paralelna s dva suprotna (mimosmjerna) brida. Odredi bačenu sjenu jednoga od obadvaju dobivenih dijelova tetraedra na Π_1.

332.) Predoči projekcijama pravilan tetraedar u općenom položaju. Presijeci ga vertikalnom ravninom na dva dijela, koji će imati jednake obujme, i odredi pravu veličinu presjeka. Spoje li se polovišta dvaju suprotnih bridova tetraedra, pa se tom spojnicom položi kojagod ravnina, svaka će dijeliti tetraedar u dva jednaka dijela. Dokaži to na sl. 71.

333.) Odredi sjenu kvadrata, koji je u prostoru općeno položen, na ravninu $\sigma \perp \Pi_2$, ako je izvor svjetlosti točka I. (Presjek piramide sa σ).

334.) Prereži trostranu kosu piramidu dvjema ravninama ρ i σ i prikaži u kosoj projekciji onaj dio piramide, koji je među ρ i σ.

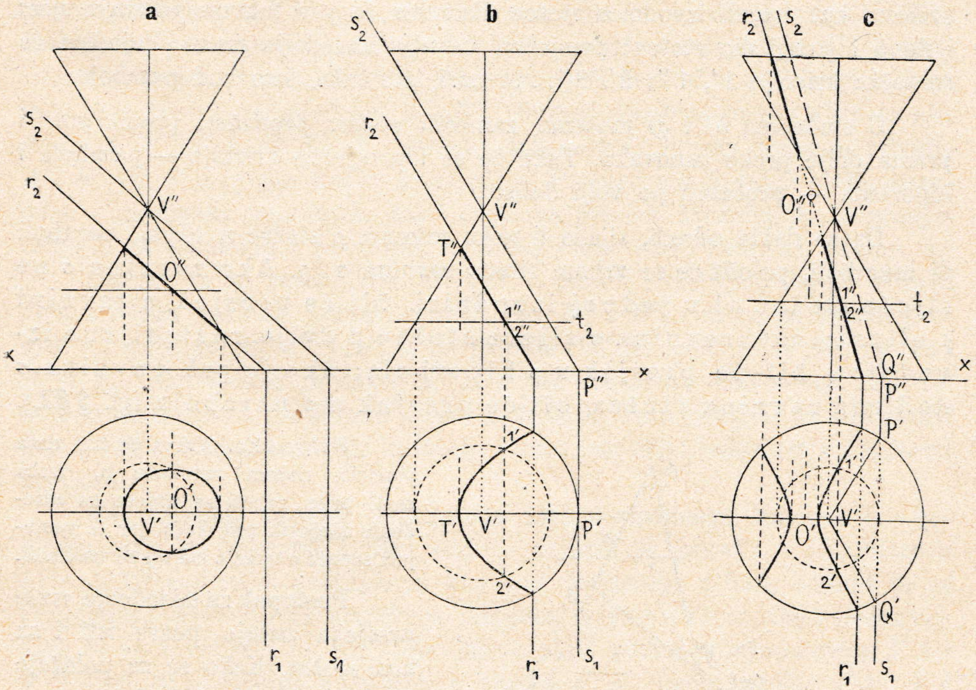
335.) Odredi bačenu sjenu pravca p', p'' na četverostranu piramidu, kojoj je osnovka u Π_2, za paralelnu rasvjetu. (Presjek piramide ravninom svjetlosti kroz p).

99. Različne vrste presjekâ stošca ravninom. Neka bude zadan uspravan stožac, kojemu je osnovka kružnica u Π_1. Kojagod ravnina, položena paralelno s Π_1, sjeći će stožac u kružnici (gl. § **77.**). Tako postaje prikraćen stožac, koji nema onoga dijela između pomenute presječne kružnice i vrha.

Ako je ravnina ρ, koja siječe stožac, više ili manje nagnuta prema ravnini osnovke, može ona sjeći plašt u elipsi, paraboli ili hiperboli. Svaki će naime pravac ravnine ρ sjeći stožac u dvije točke (gl. § **37.**, *3*), koje će biti na presječnoj krivulji stošca i ravnine ρ. Prema tome je presječna krivulja svakako 2. reda pa zato mora pripadati jednoj od navedenih vrsta.

U slici 195. prikazana su tri različna položaja ravnine $\rho \perp \Pi_2$, koja siječe uspravni kružni stožac. U slici *a)* položena je ravnina ρ tako, da siječe sve izvodnice (t. j. da nije ni s jednom izvodnicom paralelna). Iz slike

se vidi, da je prikloni kut takve ravnine prema Π_1 manji od kuta, što ga čine izvodnice stošca s Π_1. Dalje izlazi za taj položaj i to, da će ρ sjeći samo donji dio stošca, pa da ne može nikako sjeći ujedno donji i gornji dio plašta. Sva će probodišta izvodnicâ s ravninom ρ biti konačne točke; presječna je krivulja e l i p s a. Položi li se vrhom V stošca ravnina $\sigma \parallel \rho$, ne će ona sadržavati nijednu izvodnicu, jer bi inače ravnina ρ, koja je sa σ paralelna, morala biti s kojom izvodnicom paralelna, što je za ovaj položaj isključeno u pretpostavku. Ravnina će dakle σ sadržavati samo vrh stošca.



Sl. 195.

U s l i c i *b)* položena je ravnina ρ paralelno s jednom dodirnom ravninom σ stošca, za koju je VP dodirna izvodnica. Ravnina ρ bit će dakle paralelna s izvodnicom VP pa je n e ć e s j e ć i; sve će pak ostale izvodnice dati konačna sjecišta s ρ. Presječna je krivulja p a r a b o l a. Iz slike izlazi, da će ρ zatvarati s Π_1 isti prikloni kut kao i izvodnice stošca. Ravnina ρ može sjeći samo jedan dio potpunoga stošca, dakle ili samo donji ili samo gornji dio.

Najviša je točka T presjeka za taj položaj ravnine ρ t j e m e presječne parabole. Pojedine će se točke te parabole dobiti, ako se stožac i ravnina ρ presijeku horizontalnom kojom ravninom τ. Tragovi se t_2 i r_2 sijeku u

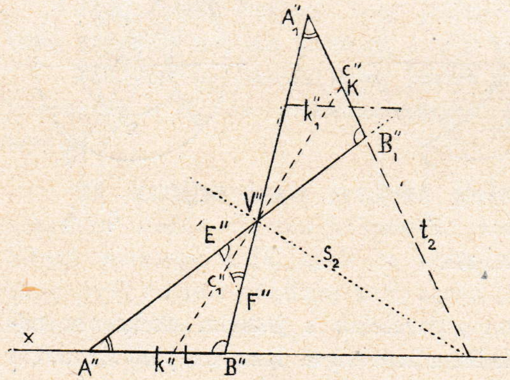
točki, u koju padaju dvije točke 1″, 2″ za drugu projekciju parabole. Nacrta li se u Π_1 kružnica, u kojoj ravnina τ siječe stožac, dobit će se na toj kružnici ordinalom prve projekcije 1′ i 2′ obadviju pomenutih točaka za projekciju parabole na Π_1.

U slici *c)* položena je vrhom V stošca ravnina σ, koja stožac siječe u dvije izvodnice VP i VQ. Ravnina $\rho \parallel \sigma$ sjeći će u konačnim točkama sve izvodnice stošca osim pomenutih dviju, s kojima je paralelna. Presječna je krivulja hiperbola. Iz slike se razabira, da ravnina ρ čini s Π_1 veći prikloni kut negoli izvodnice stošca. Ravnina će ρ u takvom položaju sjeći i donji i gornji dio stošca; presječna krivulja ima dvije grane. Pojedine će se točke krivulje 1′, 1″; 2′, 2″; . . . naći isto tako, kao kod parabole.

U slučajima *b)* i *c)* možemo zamisliti stožac produžen prema gore i prema dolje preko osnovaka. Tako će se i presječne krivulje — parabola i hiperbola — protezati po volji daleko.

Da se dakle odredi, siječe li neka ravnina ρ stožac u elipsi, paraboli ili hiperboli, položit će se vrhom stošca ravnina $\sigma \parallel \rho$. Ako ravnina σ ne siječe stožac ni u jednoj izvodnici, bit će presjek u ravnini ρ elipsa; ako ravnina σ siječe stožac u dvije rastavljene izvodnice, bit će presjek u ρ hiperbola; ako je pak ravnina σ dodirna ravnina stošca, bit će presjek u ρ parabola (gl. § **82.**).

Bilješka. Kakva će biti vrsta presjeka nekom ravninom ρ, treba znati prije, negoli se prijeđe na određenje njegovih projekcija, jer će postupak zavisiti o tome, o kakvoj se vrsti radi.



Sl. 196.

Postupak za određenje vrste presjeka ostaje posve isti i za kosi stožac. Kako se za položaje *a)*, *b)* i *c)* u sl. 195. dobiva središte krivulje i određuju njezina tjemena i osi, izlazi iz slike. U sl. 195. uzeto je, kao da su sve krivulje u Π_1 vidljive, no one su zapravo zakrivene gornjim dijelovima stošca.

Bilješka. Određenje pojedinih vrsta krivuljâ 2. reda kao presjekâ stošca ravninom izveo je već Menehmo (u 4. vijeku pr. Kr.), no on nije uzimao čvrst stožac i mijenjao položaj ravnine (ρ), nego je uzeo čvrstu ravninu (ρ), koja je normalna na jednoj izvodnici stošca, pa je razlikovao ova tri slučaja: ako je kut na vrhu stošca šiljast, presjek je elipsa, ako je kut na vrhu pravi, presjek je parabola; ako je pak taj kut tup, presjek je hiperbola. Taj je postupak bitno isti kao i u gore prikazanim trima slučajima.

Kosi stožac, kojemu je osnovka kružnica, može se presjeći u kružnici i takvom ravninom, koja nije paralelna s ravninom osnovke. U slici 196. nacrtana je samo druga projekcija stošca, kojemu je osnovka kružnica k u Π_1, a vrh mu je V. Stožac je tako položen, da mu je os paralelna s Π_2. Dijametar AB osnovke, koji je paralelan s osi x, projicira se u drugoj projekciji kao pružac $A''B''$ na os x.

Raspolovimo li kut AVB na vrhu stošca pravcem LK pa na taj pravac postavimo u V'' normalnu ravninu σ, imat će ona drugi trag $s_2 \perp KL$. Ravnina τ, položena normalno na Π_2, i to simetrično s ravninom Π_1 s obzirom na ravninu σ kao ravninu simetrije, sjeći će stožac u krivulji c, koja je u slici predočena pruscem $A''_1 B''_1$. Poradi simetrije prema σ bit će oba dijela $A''V''B''$ i $A''_1 V'' B''_1$ stošca sukladna. Prema tome je krivulja $A''_1 B''_1$ ili c'' u ravnini τ opet kružnica. Presiječemo li dakle stožac paralelno s ravninom osnovke k, dobit ćemo za presjek kružnicu k_1, a presiječemo li ga paralelno s ravninom τ, dobit ćemo opet kružni presjek k_1.

Budući da su kutovi kod A'' i A''_1 poradi simetrije jednaki, a onda opet s istoga razloga jednaki kutovi kod B'' i B''_1, bit će za kružni presjek c_1, gdje je $E''F'' \parallel A''_1 B''_1$, jednaki kutovi kod E'' i B'', pa kod A'' i F''. Četverokut je dakle $A''B''F''E''$ tetivni četverokut. Po tim se odnosima mogu prepoznati obadvije vrste kružnih presjeka za kosi stožac (isp. § **132**.). Kod uspravnoga kružnoga stošca ima samo jedna vrsta kružnoga presjeka.

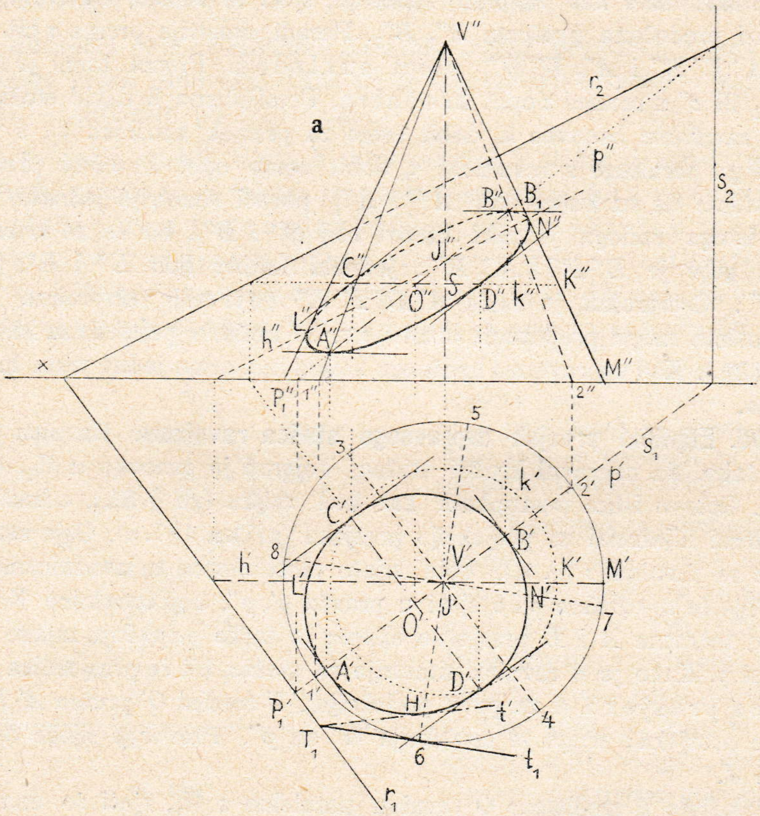
100. Eliptički presjek uspravnoga stošca ravninom. Ravnina je ρ položena tako, da uspravni kružni stožac, kojemu je osnovka u Π_1, siječe u elipsi. Gotovo istim postupkom kao kod valjka (gl. § **93**.), odredit će se konjugirani dijametri za projekcije presjeka (slika 197. *a*). Osju stošca položit će se ravnina σ ($\perp r_1$), koja siječe plašt stošca u izvodnicama $V1$ i $V2$. Obje će se ravnine ρ i σ sjeći u pravcu p', p'', koji izvodnice $V1$ i $V2$ siječe u točkama A i B presječne elipse; te točke pripadaju naime i stošcu i ravnini ρ. Kako je σ ravnina simetrije za stožac, bit će presječnica $p \equiv (\sigma\rho)$ jedna os presjeka (i za prvu projekciju). U sredini O' prušca $A'B'$ bit će središte presjeka; druga je projekcija O'' na p''. Pravac p siječe os stošca u točki J.

Položimo li središtem O ravninu paralelno s Π_1, sjeći će ona stožac u kružnici k, kojoj je polumjer SK'', i koja se vidi u pravoj veličini u prvoj projekciji. Kružnica k' siječe pravac, povučen kroz O' paralelno s r_1, u točkama C' i D'. Te točke pripadaju presječnoj elipsi (u prvoj projekciji), jer su na stošcu i ujedno u ravnini ρ; pravac je naime CD sutražnica ravnine ρ.

Ravnina ε, položena osju stošca paralelno s Π_2, siječe ravninu ρ u pravcu h', h'', koji je za ρ sutražnica drugoga traga i koji prolazi točkom

J na osi stošca. U ravnini su ε obadvije izvodnice stošca, koje dijele vidljivi dio plašta u drugoj projekciji od nevidljivoga dijela. Na tim će izvodnicama i ujedno na pravcu h biti obje točke L i N presječne elipse, u kojima ta krivulja prelazi s prednje strane plašta na otražnji njegov dio.

Položi li se na stožac po izvodnici $V6$ dodirna ravnina τ, bit će joj prvi trag t_1 tangenta u točki 6 na osnovku stošca. Točka H presječne elipse, koja je na izvodnici $V6$, ima tangentu t, koja će Π_1 sjeći u istoj točki T_1 traga r_1 kao i tangenta t_1. Tim se načinom može dobiti tangenta u svakoj točki presjeka.



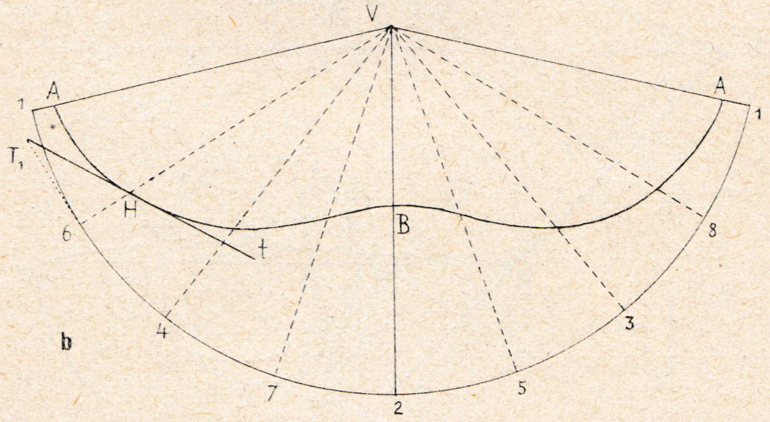
Sl. 197. a.

101. Mreža stošca zajedno s razastrtom presječnom krivuljom. Zamislit ćemo stožac u sl. 197. a razrezan po izvodnici $V1$ i razastrt u ravninu crtnje (slika 197. b). Plašt stošca prijeći će u kružni isječak, koji ima polumjer jednak dužini izvodnice stošca; ta se izvodnica mjeri u Π_2 na pr. u $V''M''$. Da se razvije obodnica osnovke, razdijelit će se ta obodnica, u sl. 197. a,

na pr. na osam dijelova 1, 6, 4, 7, 2, 5, 3, 8, a svaki taj dio opet u neki broj manjih dijelova; tetive tih malenih dijelova prenijet će se na luk isječka u sl. 197. b, pa će se tako dobiti razastrta obodnica 1, 6, . . . 8, 1.

Na pojedine izvodnice u mreži prenijet će se dalje iz projekcije u sl. 197. a sjecišta tih izvodnica s presječnom krivuljom. Tako na pr. izvodnica $V2$ (sl. 197. a) siječe presječnu krivulju u točki B. Okrenemo li izvodnicu $V2$ oko osi stošca tako, da poslije okreta bude paralelna s Π_2, doći će ona u položaj $V''M''$, a točka B u položaj B_1, gdje jé $BB_1 \parallel x$. Prema tomu je točka B u mreži udaljena od V na izvodnici $V2$ za dužinu $V''B_1$. Isto će se tako odrediti oveći broj ostalih točaka presječne krivulje, a onda dobivene točke spojiti u krivulju, koja će uopće imati i infleksionih točaka (gl. § **94.**).

U kojojgod točki razastrte presječne krivulje može se povući i tangenta. Iz sl. 197. a izlazi, da će se tangenta u točki H presjeka sjeći s tangentom za točku 6 osnovke na tragu r_1 presječne ravnine u točki T_1 (gl. § **100.**).

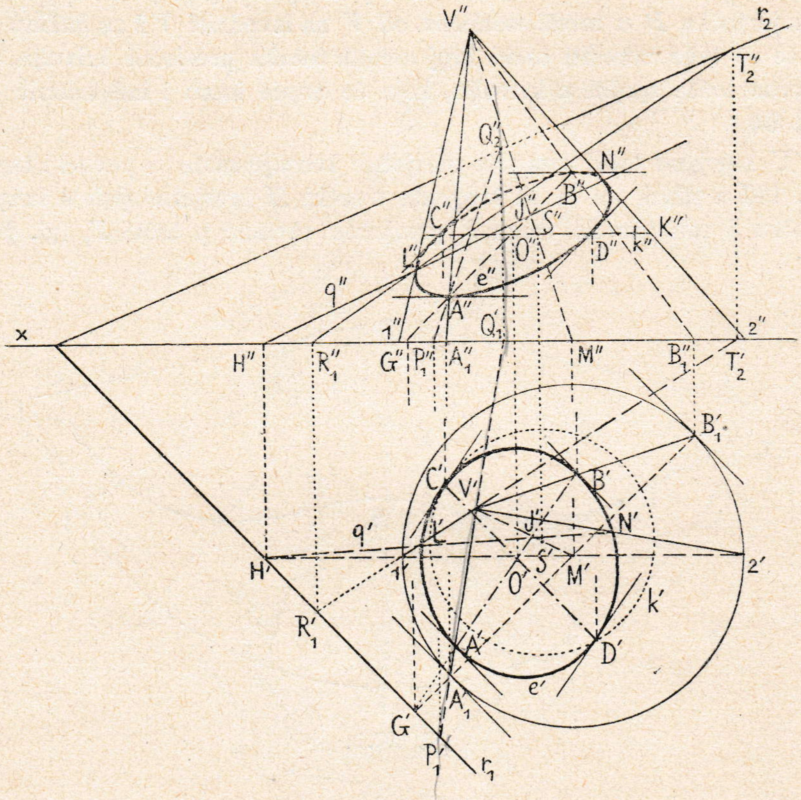


Sl. 197. b.

Kad se presječna krivulja razastre u mrežu, ne će se mijenjati veličina trokuta $H6T_1$. Povučemo li dakle u mreži tangentu na luk isječka u točki 6, a onda prenesemo $6T_1$ iz sl. 197. a pa spojimo T_1 s H, dobit ćemo tangentu t na razastrtu presječnu krivulju u točki H. Isti postupak vrijedi za sve ostale točke.

102. Eliptički presjek kosoga stošca ravninom. Kružni kosi stožac, kojemu je osnovka u Π_1 (slika 198.), presječen je ravninom ρ u elipsi. Za prvu i za drugu projekciju elipse e odredit ćemo po jedan par konjugiranih dijametara.

Povući ćemo onaj dijametar $A'_1\ B'_1$ osnovke, koji je normalan na tragu r_1 ravnine ρ. Taj dijametar određuje s vrhom V stošca ravninu, koja plašt siječe u izvodnicama VA_1 i VB'_1. Ta će ravnina sjeći ravninu ρ u pravcu AB, za koji ćemo pokazati, da je d i j a m e t a r presječne elipse e. Položi li se izvodnicom VA_1 normalna ravnina na Π_1, sjeći će se njezin prvi trag s prvim tragom r_1 ravnine ρ u točki P'_1, a njezin drugi trag daje na r_2 sjecište Q''_2. Presječnica $P_1\ Q_2$ tih dviju ravnina siječe u drugoj pro-



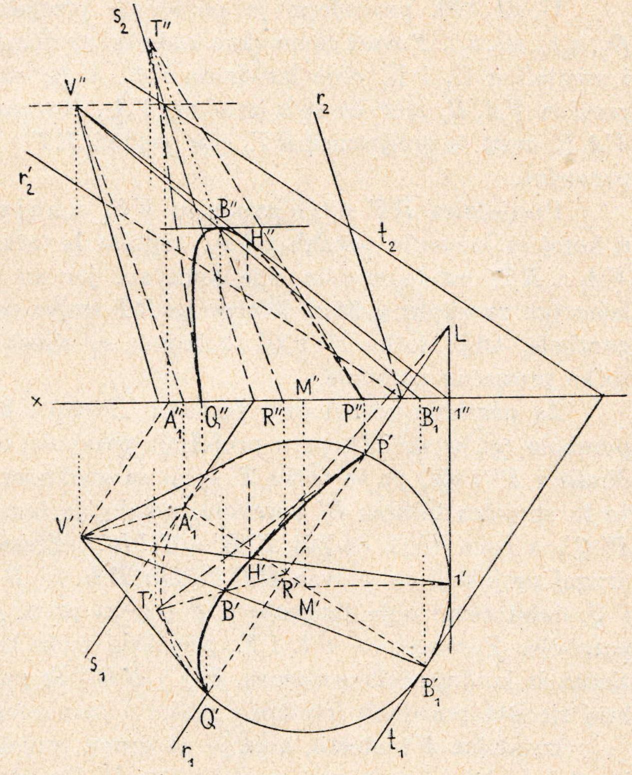
Sl. 198.

jekciji izvodnicu $V''A''_1$ u točki A''; prva je projekcija A u ordinali na $V'\ A'_1$. Točka je dakle A probodište izvodnice VA_1 s ravninom ρ. Istim se načinom može naći i probodište izvodnice VB_1 s ravninom ρ tako, da će se dobiti pravac AB kao presječnica ravnine ρ s ravninom $VA_1\,B$. Kod toga se može upotrebiti točka $G \equiv G'$ na r_1, u kojoj se moraju sjeći pravci $A'B'$ i $A'_1 B'_1$.

Zamislimo položene dodirne ravnine na stožac po izvodnicama VA_1 i VB_1. Tragovi će tih ravnina na Π_1 biti tangente na osnovku u A'_1 i B'_1; kako je pak $A'_1 B'_1 \perp r_1$, bit će obje tangente p a r a l e l n e s r_1.

Tangente na presječnu elipsu e u točkama A i B bit će paralelne s r_1, jer su te tangente presječnice pomenutih dviju dodirnih ravnina s ravninom ρ (§ **89.**). Kako naime svaka od tih dodirnih ravnina ima trag paralelan s r_1, bit će i obje presječnice paralelne s r_1 (§ **4.**, *9*). Prema tomu će tangente u točkama A i B presječne elipse biti paralelni pravci, a zato će AB biti d i j a m e t a r elipse e. Točke su A i B najniža i najviša točka presjeka e (gl. § **94.** na koncu).

Sredina O dijametra AB bit će središte presječne elipse e. Pravac CD, povučen kroz $O \parallel r_1$, bit će konjugiran smjeru AB za e. Da se odredi dužina toga dijametra CD, položit će se kroz O ravnina paralelno s Π_1. Ona će sjeći stožac u kružnici k, kojoj je središte S na osi VM stošca, a polumjer joj je $S''K''$. Prva se projekcija k' prikazuje u pravoj veličini; ona siječe dijametar CD u krajnim točkama C i D. Točke se C i D nalaze zaista i u ravnini ρ i na stošcu, pa zato pripadaju presječnoj elipsi e. Tim su načinom za svaku projekciju određena po dva konjugirana dijametra, pa se projekcije e' i e'' presječne elipse mogu točno konstruirati.



Sl. 199.

Projekcija e'' dotiče granične izvodnice stošca u točkama L'' i N''. Točka je L probodište granične izvodnice $V1$ s ravninom ρ. Pravcem $V1$ položena normalna ravnina na Π_1 siječe ravninu ρ u presječnici RT, koja opet na $V1$ daje traženu točku L. Istim se načinom dobiva i točka N na $V2$. Kod toga se može upotrebiti i točka H, u kojoj pravci $1'2'$ i $q \equiv LN$ sijeku trag r_1. Budući da se ravnine VAB i VLN sijeku u osi VM stošca, bit će sjecište J', J'' pravaca AB i LN na toj osi.

103. Parabolički presjek stošca ravninom. Ako se kosi kružni stožac, kojemu je osnovka zadana u ravnini Π_1, ima presjeći ravninom ρ tako, da presjek bude parabola (slika 199.), položit će se na stožac dodirna ravnina $\tau = t_1, t_2$, a onda će se izabrati ravnina $\rho \parallel \tau$. Ako je u sl. 199. izabran trag r_1 presječne ravnine ρ, mogu se naći dva druga traga r_2 i r'_2 tako, da ravnina r_1, r'_2 i opet ravnina r_1, r_2 sijeku stožac u paraboli. Prva je od tih ravnina paralelna s dodirnom ravninom t_1, t_2 stošca, a druga je paralelna s dodirnom ravninom s_1, s_2, gdje je $t_1 \parallel s_1 \parallel r_1$, a tragovi su t_1 i s_1 tangente osnovke. Tragovi su s_2 i t_2 određeni sutražnicom kroz V.

U sl. 199. provedeno je određenje presječne parabole za ravninu $(r_1, r_2) \parallel (s_1, s_2)$. Povući ćemo (kao kod elipse) dijametar osnovke $A_1 B_1 \perp r_1$ i nacrtati u Π_1 i Π_2 obje izvodnice VA_1, VB_1 stošca. Ravnina $\sigma = s_1, s_2$ i ravnina $VA_1 B_1$ sjeći će se u izvodnici VA_1. Ravnina pak $\rho = r_1, r_2$ i ravnina $VA_1 B_1$ imat će presječnicu RT, gdje će biti $RT \parallel VA_1$, jer su ravnine ρ i σ paralelne.

Presječnica RT siječe izvodnicu VB_1 u najvišoj točki B (parabole), u kojoj je tangenta paralelna s r_1; najniža bi točka bila u sjecištu pravaca VA_1 i RT, no to sjecište nije konačno, jer su obadva ta pravca paralelna (gl. za elipsu § **94**.). Pravac je RT smjer svih paralelnih dijametara parabole. Obje točke P' i Q', u kojima r_1 siječe osnovku stošca, bit će točke presječne parabole.

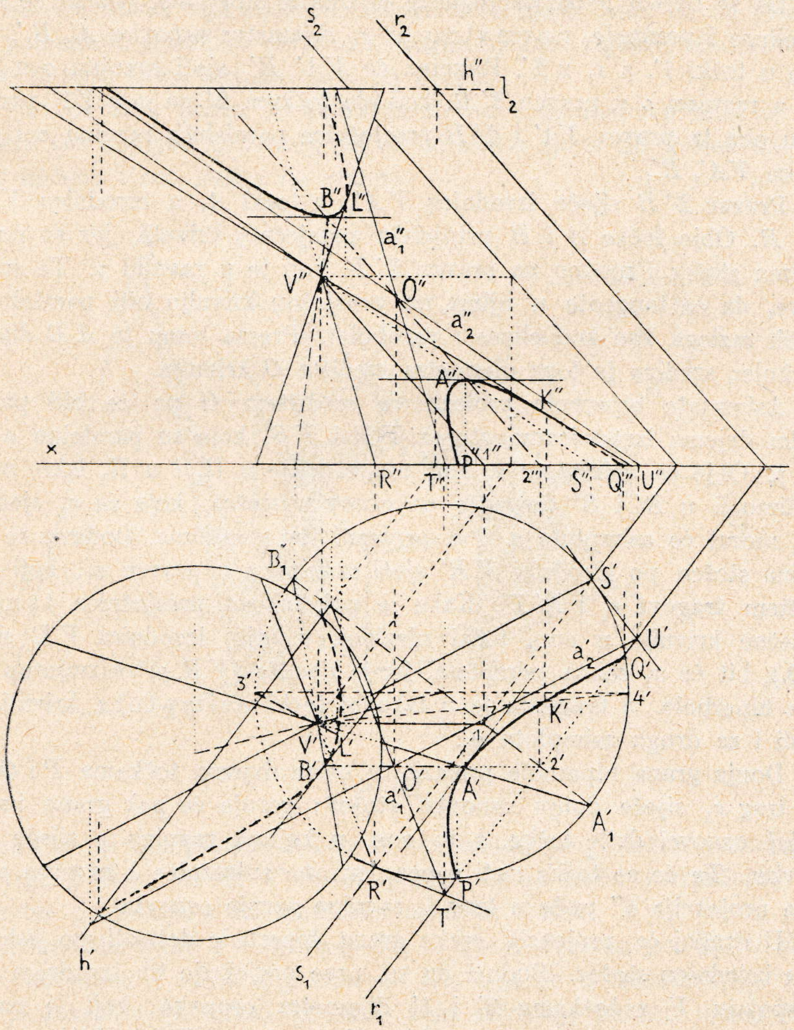
Za parabolu vrijedi ovaj poučak: „Povuku li se iz neke točke T' na parabolu (gl. u sl. 199. prvu projekciju parabole) obje tangente, koje imaju dirališta P' i Q', pa se točka T' spoji sa sredinom R' tetive $P'Q'$, prolazit će ta spojnica točkom B' parabole, u kojoj je tangenta paralelna s tetivom $P'Q'$, a osim toga će biti $T'B' = B'R'$." Prenesemo li dakle u prvoj i drugoj projekciji na pravac RT dužinu RB od B do T pa T spojimo s P i Q, dobit ćemo obje tangente u P i Q za prvu, dotično drugu projekciju parabole. Parabola se u 1. i 2. projekciji može konstruirati poznatim načinom iz konjugiranih smjerova PQ i BR*) ili pak tako, da se nađe neki broj sjecištâ pojedinih izvodnica stošca s ravninom ρ.

Izvodnica $V1$ stošca, koja je za drugu projekciju u sl. 199. granična izvodnica, daje s ravninom ρ probodište H. Projekcija će dakle H'' te točke biti diralište parabole u nacrtu s graničnom izvodnicom $V''1''$ za 2. projekciju. U točki H'' prelazi parabola s prednje strane stošca na stražnju njegovu stranu.

Tangenta parabole za 1. projekciju u točki H' sjeći će se s tangentom osnovke za točku $1'$ na tragu r_1 u L. Obje se naime te tangente nalaze u dodirnoj ravnini stošca po njegovoj izvodnici $V1$. Odredi li se dakle najprije točka L s pomoću $1'L$, dobit će se tangenta u H' kao spojnica $H'L$.

*) Gl. Mjerstv. crtanje za IV. razr., § 8. na koncu.

104. Hiperbolički presjek stošca ravninom. Stožac, kojemu je vrh V, a osnovka kružnica u Π_1, prikazan je s obadva svoja dijela u projekcijama: ravninu ρ treba položiti tako, da siječe stožac u h i p e r b o l i (s l i k a 200.).



Sl. 200.

Trag s_1 ravnine σ izabrat će se tako, da siječe osnovku stošca (u točkama R' i S'). Vrhom V i tragom s_1 određena je ravnina σ, kojoj će se drugi trag s_2 naći poznatim načinom (sutražnicom kroz V).

*

Ravnina σ siječe stožac u izvodnicama VR i VS; neka ravnina $\rho \equiv r_1, r_2$, koja je paralelna sa σ, sjeći će stožac u hiperboli, jer siječe sve njegove izvodnice u konačnim točkama, samo je s izvodnicama VR i VS paralelna.

Da se odredi jedan konjugirani dijametar hiperbole, položit će se, kao kod elipse i parabole, normalno na r_1 dijametar osnovke $A'_1 B_1'$, koji s_1 siječe u točki $1'$, a r_1 u $2'$. Ravnina će $VA'_1 B'_1$ sjeći ravninu σ u pravcu $V1'$, a ravninu ρ u pravcu $2'B$, koji ide točkom $2'$ pa je s $V1'$ paralelan, jer su oba ta pravca $V1'$ i $2'B$ presječnice paralelnih ravnina σ i ρ s ravninom $VA'_1 B'_1$.

Pravac $2'B$ siječe izvodnicu VA'_1 u točki A, a izvodnicu VB'_1 u točki B. Obje točke A i B pripadaju presječnoj krivulji, jer su na izvodnicama stošca i ujedno na pravcu $2'B$, koji je u ravnini ρ. Te su točke takove, da će tangente u njima na presječnu krivulju biti paralelne s r_1 (s istih razloga kao kod elipse i parabole). Prema tomu je AB dijametar hiperbole; sredina je toga dijametra središte O krivulje.

Asimptote hiperbole prolazit će središtem O pa će biti paralelne s onim dvjema izvodnicama stošca VR i VS, koje su paralelne s ravninom ρ. Obje se asimptote a_1 i a_2 mogu dakle u Π_1 i u Π_2 lako nacrtati. Položimo li u R' i S' tangente na osnovku stošca, koje će r_1 sjeći u T' i U', morat će asimptote a_1 i a_2 prolaziti tim sjecištima. Dodirna će naime ravnina stošca po izvodnici VR' sjeći ravninu ρ u pravcu a_1, koji prolazi sjecištem tragovâ r_1 i $R'T'$. Kako je pak takova presječnica t a n g e n t a presječne krivulje u onoj točki njezinoj, u kojoj izvodnica VR siječe ρ (§ **89.**), bit će a_1 zaista asimptota, jer je sjecište (VR, ρ) neizmjerno daleka točka hiperbole, a tangenta je u takovoj točki a s i m p t o t a krivulje. Isto vrijedi i za drugu asimptotu a_2.

Donja grana hiperbole prolazit će onim dvjema točkama P i Q, u kojima trag r_1 siječe donju osnovku stošca; gornja će pak grana imati na gornjoj osnovci dvije točke, i to one, u kojima ravnina ρ siječe gornju osnovku. Te će se točke naći s pomoću one sutražnice h ravnine ρ, kojoj druga projekcija h'' pada u trag l_2 ravnine gornje osnovke.

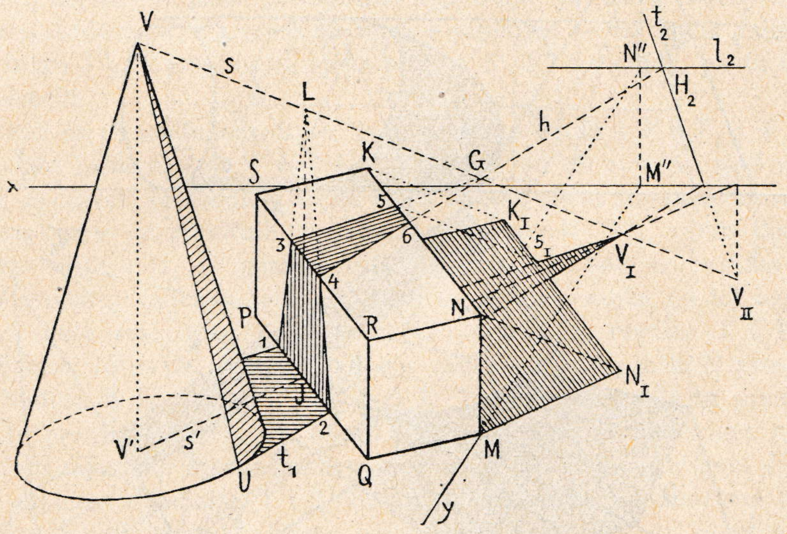
U drugoj će projekciji svaka grana hiperbole doticati po jednu graničnu izvodnicu stošca. Budući da su prve projekcije tih izvodnica pravci, što spajaju V s točkama $3'$ i $4'$ dijametra osnovke, koji je paralelan s osi x, bit će presječne točke L i K izvodnicâ $V3'$ i $V4'$ s ravninom ρ takove točke hiperbole, kojima su druge projekcije L'' i K'' u traženim graničnim izvodnicama za drugu projekciju. U tim točkama prelazi krivulja s prednje strane stošca na stražnju njegovu stranu.

Točke se L i K mogu dobiti i tako, da se odredi presječnica ravnine ρ s ravninom $V3'4'$; ta će presječnica sjeći izvodnice $V3'$ i $V4'$

u tražene dvije točke. Projekcija $K'L'$ mora prolaziti sjecištem tragova r_1 i $3'4'$.

105. Upotreba ravnih presjeka za određenje bačene sjene jednoga tijela na drugo. *1.* Ako bačenu sjenu nekoga tijela određuju dvije granične (dodirne) ravnine, kao kod valjka, stošca, piramide ili prizme, pa treba odrediti bačenu sjenu toga tijela na drugo koje tijelo, naći će se presječni likovi pomenutih graničnih ravnina s drugim tijelom. Dijelovi tih likova čine traženu bačenu sjenu prvoga tijela na drugo.

U slici 201. zadan je uspravan stožac i uspravna prizma u kosoj projekciji (uz kojugod prikratu), pa su određene sjene tih tjelesa na Π_1, a ujedno bačena sjena stošca na prizmu.



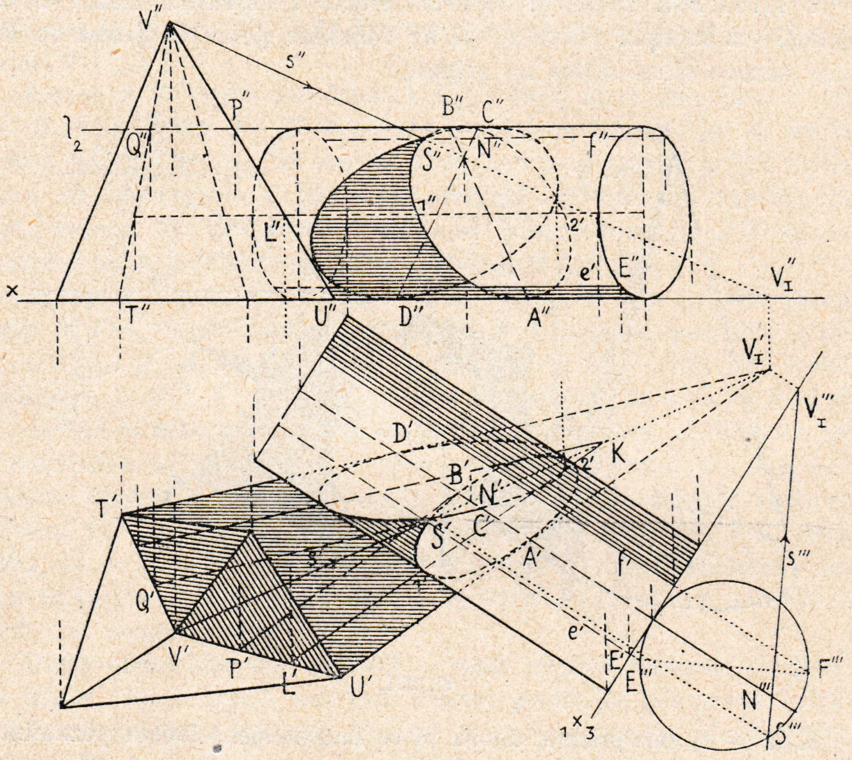
Sl. 201.

Kad ne bi bilo prizme, dobila bi se bačena sjena stošca poznatim načinom (gl. § **84.**); vrhom V stošca položit će se zraka s svjetlosti, kojoj će tlocrtna projekcija s' ići središtem osnovke stošca.

Probodište zrake s s tlocrtom bit će sjena V_I vrha na Π_1. U slici je odmah određena i sjena V_{II} vrha na Π_2, koja će u konstrukciji trebati. Jedna je granična (dodirna) ravnina, koja određuje bačenu sjenu stošca, ravnina svjetlosti VUV_I, gdje je U dirালište pomenute ravnine na osnovci; druga je granična ravnina s onu stranu stošca, njezin je prvi trag $1\,V_I$. Izvodnica je VU prednja rastavnica za stožac.

Na prizmi, koja je položena desno od stošca, lomit će se sjena stošca prvi put na pobočki $PQRS$, drugi put na gornjoj pobočki $RNKS$.

Prednja granična (ili dodirna) ravnina VUV_I stošca sjeći će prizmu u četverokutu, za koji će dvije stranice, t. j. 2 4 i 4 6, biti dijelovi lomljene sjene na prizmi. Da se odredi prerez 4 6, odredit će se presječnica dodirne ravnine $VUV_I \equiv \tau$ s ravninom $RNKS \equiv \lambda$. Prvi trag ravnine VUV_I bit će $t_1 \equiv UV_I$, a drugi trag te ravnine ide probodištem V_{II} zrake s. Nacrtni trag horizontalne pobočke $RNKS$ bit će l_2; taj trag ima nad x istu visinu kao vrhovi R, N, K, i S nad Π_1. Druga je projekcija brida MN pružac $M''N''$, ako se za smjer osi y uzme MM''.



Sl. 202.

Ravnine τ i λ sjeći će se u sutražnici h ravnine τ; pravac će h prolaziti sjecištem $H_2 \equiv l_2, t_2$ paralelno s tragom t_1. Od presječnice h ravninâ τ i λ dolazi u obzir komad 4 6 na ravnini $RNKS \equiv \lambda$. Točka G, u kojoj h siječe s, nije drugo nego sjena vrha V na tu ravninu $RNKS$. Točkom će dakle G prolaziti i druga presječnica 3 5 iste ove ravnine sa stražnjom dodirnom ravninom stošca. Presječnica se 3 5 može naći istim načinom.

Ako su 1 i 2 obje točke na bridu PQ prizme, u kojima se lomi bačena sjena stošca, morat će komad 2 4 biti onaj dio sjene, koji rastavnica

VU baca na vertikalnu pobočku $PQRS$ prizme. Produžimo li 2 4, dok siječe s u L, bit će L sjena vrha na pobočku $PQRS$, koju zamišljamo produženu; pružac 1 L daje na toj pobočki komad 1 3 bačene sjene stražnje rastavnice stošca. Ako je J točka, u kojoj s' siječe brid PQ, bit će JL vertikalan pravac, t. j. sjena za os stošca na ravninu $PQRS$.

Bačena sjena prizme polazi od M do N_I, gdje je $MN_I \parallel s'$, a $NN_I \parallel s$. Brid NK baca dakle sjenu u $N_I K_I$, gdje je $KK_I \parallel s$, a $N_I K_I \parallel NK$; sjena se završava pravcem kroz K_I paralelno s SK. (Zašto?). Točka će 5 bacati sjenu upravo u sjecište 5_I bačenih sjena za NK i za stražnju rastavnicu stošca; slično vrijedi i za prednju točku 6.

2. U slici 202. prikazano je određenje bačene sjene neke piramide na valjak, kojemu je plašt položen na Π_1. Smjer je zrakâ svjetlosti određen projekcijama s', s''; sjena bi vrha V piramide — da nema valjka — pala u točku V'_I. U istini će ta sjena pasti u S', S'' na valjak, pa tu točku treba odrediti.

Sjenu će piramide određivati dvije granične ravnine VUV_I i VTV_I, koje prolaze rastavnicama VU i VT. Svaka će od tih ravnina sjeći valjak u elipsi, a dijelovi će obadviju elipsa činiti bačenu sjenu piramide na valjak.

Trag prve od graničnih ravnina, t. j. pravac $U'V'_I$, siječe dodirnu izvodnicu valjka s Π_1 u najnižoj točki A' presjeka. Ista će ravnina sjeći najvišu izvodnicu valjka u točki B. Dodirna ravnina valjka po toj najvišoj izvodnici siječe rastavnicu VU u točki P; sutražnica ravnine VUV_I za točku P sjeći će dakle najvišu izvodnicu valjka u najvišoj točki B presječne elipse. Budući da su pravci $U'V'_I$ i $P'B'$ paralelne tangente za prvu projekciju te presječne elipse, bit će $A'B'$ dijametar za tu elipsu; njegov konjugirani dijametar ide sredinom prušca $A'B'$ paralelno s tragom $U'V'_I$. Krajevi drugoga dijametra, 1 i 2, bit će na graničnim izvodnicama valjka u prvoj projekciji (zašto?). Posve istim načinom odredit će se prva projekcija elipse, u kojoj granična ravnina VTV'_I siječe valjak. Druge projekcije obadviju elipsa izlaze lako s pomoću ordinala. Točka S, u kojoj se na svijetlom dijelu valjka sijeku obje presječne elipse, bit će sjena vrha V piramide, bačena na valjak.

Uvedemo li treću projekciju, za koju je os ${}_1x_3$ normalna na izvodnicama valjka, sjeći će treća projekcija s''' zrake svjetlosti za vrh V (određena točkama V_I i N) treću projekciju kružnice, u koju se projicira valjak, u točki S'''; točka se dakle S', S'' može odrediti i trećom projekcijom, a postupak će služiti za kontrolu točnosti. Iz treće projekcije dobivaju se i obje rastavnice e i f valjka. Prednja rastavnica e omeđuje na valjku bačenu sjenu piramide.

Različne se točke jedne i druge presječne elipse mogu dobiti i tako, da se položi više horizontalnih ravnina, koje će valjak sjeći u paralelnim

izvodnicama, a obje granične ravnine za piramidu u pravcima, koji su s tragovima $U' V'_I$ i $T' V'_I$ paralelni. U sl. 202. provedeno je tim načinom određenje točaka 1 i 2, gdje je pomenuta horizontalna ravnina položena osju valjka; ona će sjeći brid VU u točki L, pa će sutražnica $LK \parallel U' V'_I$ sjeći valjak u točkama 1 i 2. Posve isto vrijedi za određenje druge presječne elipse, koja je u ravnini $V T V_I$.

Zadaci za vježbu.

336.) Presijeci kosi stožac, kojemu je osnovka kružnica u Π_2, ravninom $\rho \perp \Pi_1$ i odredi pravu veličinu presjeka.

337.) Odredi ravnine dviju parabola na zadanom stošcu, koje idu dvjema zadanim točkama P i Q plašta. Povuci vrhom pravac $s \parallel P Q$, pravcem s položi obje dodirne ravnine stošca, a paralelno s njima pravcem $P Q$ obje tražene ravnine.

338.) Odredi eliptički presjek stošca ravninom u sl. 198. tako, da upotrebiš 3. projekciju na $\Pi_3 \perp \Pi_1$.

339.) Kružna je osnovka stošca u ravnini $\sigma \perp \Pi_2$; odredi parabolički presjek toga stošca.

340.) Zašto se u sl. 199. i 200. mogu konstruirati prve projekcije presječnih krivulja, a da se uza to ne treba upotrebiti druga projekcija?

341.) Osnovka je uspravnog kružnog stošca u ravnini $\sigma \parallel \Pi_1$; središte S (3, 3, 4), polumjer $r = 2{\cdot}5$; vrh V stošca u Π_1. Presijeci stožac ravninom, koja je paralelna s osi x, u paraboli. Koliko ima rješenja?

342.) Presijeci kosi kružni stožac, kojemu je osnovka u Π_1, ravninom, $\rho \perp \Pi_2$ tako, da presjek bude hiperbola.

343.) Prereži uspravni kružni stožac, kojemu je osnovka u Π_1, ravninom ρ u elipsi, pa prikaži donji dio prerezanog stošca u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$).

344.) Prikaži sl. 201. u normalnim projekcijama.

345.) U kojim se granicama može kretati sjena V'_I vrha V na Π_1 u sl. 202., ako prava sjena vrha treba da pada na valjak? Uzmi u obzir bačenu sjenu valjka na Π_1, pa isporedi i sl. 201.

346.) Zašto ne može asimptotički kut za hiperbolički presjek stošca ravninom biti veći od najvećeg kuta, što ga čine dvije izvodnice na vrhu? Isp. sl. 195. *c)*; odredi obje asimptote, koje su paralelne s VP i VQ, pa ih preloži u Π_1.

347.) Izaberi takov stožac i takvu presječnu ravninu, da presjek bude istostrana hiperbola. Isp. zad. 346.

348.) Razastri stožac u sl. 195. *b)* zajedno s parabolom u ravninu Π_1.

349.) Odredi bačenu sjenu nekoga pravca p na uspravni kružni stožac, kojemu je osnovka u Π_1, tako, da sjena bude luk parabole.

350.) U Π_1 zadana je kružnica kao osnovka kosoga stošca. Izaberi vrh V stošca tako, da presjek stošca nacrtnom ravninom bude parabola. (Sjena kružnice na Π_2 za centralnu rasvjetu iz V!).

II. Afinitet i kolineacija.

106. Srodnost afiniteta. Kod prereza prizme ravninom (sl. 186.) opazili smo (gl. § **90**., *2*.), da će stranica osnovke u Π_1, na pr. $A_1 B_1$, i pripadna stranica AB presjeka, u kojemu ravnina ρ siječe prizmu, imati sjecišnu točku 1 na tragu r_1 ravnine ρ. Razlog je tomu taj, što se tri ravnine xy, ρ i $A_1 B_1 BA$ sijeku u točki 1, kojom prolaze tri presječnice, što ih čine po dvije od navedenih ravnina. Isto vrijedi za kojugod drugu stranicu osnovke i pripadnu stranicu presjeka (isp. točke 3 i 5 u sl. 186.). To će pravilo ostati vâljano za kojugod prizmu i za kojigod položaj ravnine ρ. Možemo dakle reći:

Ako su dva ravna višekuta u prostoru tako položena, da im homologni vrhovi sastavljeni daju pravce, koji su paralelni (bridovi prizme!), sjeći će se homologne stranice višekutâ u točkama istoga pravca, koji je presječnica ravninâ obadvaju višekuta.

To se svojstvo ne će poremetiti, ako oba višekuta projiciramo normalno ili koso na neku ravninu. Tako se sl. 186. može uzeti kao crtež u ravnini, jer ta slika predočuje kosu projekciju dvaju prostornih četverokuta. Odatle izlazi:

Ako su spojnice homolognih vrhova dvaju višekuta, koji su u istoj ravnini, paralelne među sobom (projekcije bridova prizme!), sjeći će se homologne stranice višekutâ na istome pravcu.

Stavimo li na mjesto prizme valjak, vrijedit će isto i za ravne krivulje; krive se crte mogu držati poligonima, koji imaju nebrojenu množinu veoma malenih stranica. Mjesto homolognih stranica dolaze kod krivulja u obzir tangente u homolognim točkama ili tetive za homologne parove točaka.

Tako su na pr. u sl. 191. kružnica k' i elipsa k'_1 dvije krivulje, za koje će vrijediti spomenuto pravilo. Tetiva $C'_1\, Q'_1$ kružnice i tetiva homolognih točaka $C'\, Q'$ elipse sjeći će se na pravcu r_1 u točki 1, jer je $C'\, C'_1 \parallel Q'\, Q'_1$. Tangenta u C'_1 na k' i tangenta u C' na k'_1 sjekle bi se na r_1 i t. d. Isporedi homologne točke, tangente i tetive na sl. 164. i 165. za kružnicu i elipsu.

Prikazano se svojstvo zove svojstvo afiniteta za perspektivan položaj. Pod „perspektivnim“ se položajem razumije, da su spojnice homolognih točaka paralelne. Kad bismo dva lika iz takvoga položaja namjestili kakogod u ravnini, ne bi više spojnice homolognih točaka bile paralelne, t. j. likovi bi prestali biti u perspektivnom položaju, no ipak bi oba lika bila još uvijek zavisna jedan o drugome; svakoj točki jednoga lika pripada u drugom liku posve određena jedna točka, t. j. ona, koja je u perspektivnom položaju bila prvoj točki homologna, i t. d.

Za dva lika (u perspektivnom položaju) kaže se, da su afino srodni. Paralele, koje spajaju homologne parove točaka, karakteristične su za afinitet. Te se paralele zovu zrake afiniteta. Pravac, na kojemu se sijeku homologni pravci, zove se os afiniteta.

Afino srodstvo prikazuju još sl. 54., 139., 187., 189., 191., 194. ($A''B''C''D''E''$ i $A_0B_0C_0D_0E_0$) i t. d.

Dosada smo susretali različne načine, kako postaje afina srodnost. Projekcija nekoga ravnoga lika i preložaj toga lika u istu ravninu projekcije jesu afini likovi, na pr. u sl. 141. projekcija $1'2'3'4'5'$ peterokuta i njegov preložaj $1_0 2_0 3_0 4_0 5_0$. Os je afiniteta trag r_1; zrake su afiniteta ovdje normalne na osi r_1, što uopće ne mora biti.

Prva i druga projekcija nekoga ravnoga lika, kad su obje projekcije ujedinjene u ravnini crtnje, kao na pr. u sl. 140., jesu afini likovi, jer su spojnice homolognih točaka, t. j. ordinale, među sobom paralelni pravci. U tome je slučaju os afiniteta pravac, koji smo označili osju istovetnosti (presječnica ravnine nekoga lika s ravninom istovetnosti); gl. § **53.** U sl. 185. upotrebljena je afina srodnost za os istovetnosti; homologne stranice $B'C'$ i $B''C''$ sijeku se u 1 na $i'i''$, isto tako $A'B'$ i $A''B''$ u 3.

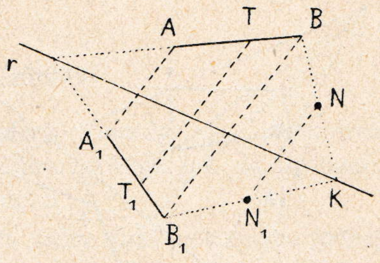
Neki ravni lik i njegova sjena za paralelnu rasvjetu jesu afini likovi; zrake su svjetlosti ujedno zrake afiniteta. Isporedi sl. 181. ili 167. za k' i k_1.

Afina se srodnost može korisno upotrebiti kod određivanja projekcijâ za presjek nekoga tijela ravninom, kod sjenâ i drugdje. Uzmimo na pr. u sl. 186., da se odredila točka A presjeka kojimgod načinom; ostale tri točke B, C, D presjeka dobit će se s pomoću točaka 1, 3, 5 na r_1. Spoji li se A s 1, dobit će se B, povuče li se $B5$, odredila se točka C i t. d. Mjesto da se svaka ta točka traži kao probodište pravca s ravninom, moći će se dobiti afinom srodnošću. Slično određenje izlazi i u sl. 191., ili za projekciju i preložaj u sl. 54. i t. d.

Ako neka točka T dijeli pružac AB u nekom omjeru k (slika 203.), dijelit će afina točka T_1 afini pružac A_1B_1 po istom omjeru k. Tako su na pr. u sl. 191. omjeri $\frac{P'_1 S'_1}{S'_1 Q'_1}$ i $\frac{P'O'}{O'Q'}$ jednaki, gdje su točke S'_1 i O'

afine točke, a prušci prvoga omjera afini s prušcima drugoga omjera. Jednakost omjera izlazi iz trapeza $P'_1\, P'\, Q'\, Q'_1$ ili u sl. 203. iz trapeza $A B B_1 A_1$.

Ako je za afinitet poznata os i jedan par afinih točaka, moći će se za svaku točku naći afina točka. Ako je na pr. u sl. 203. zadano r i B, B_1, pa za točku N treba naći afinu točku, povući će se BN do sjecišta K na r, spojiti KB_1, a kroz N povući pravac $NN_1 \parallel BB_1$; sjecište N_1 tražena je afina točka. Takov će se postupak upotrebiti redovno kod određenja projekcijâ za presjeke.



Sl. 203.

107. Kolinearna srodnost. Kod presjeka piramide ravninom u sl. 194. javljaju se opet za osnovku piramide i za presjek piramide ravninom ρ slični odnosi kao i kod afiniteta, samo što kod piramide ne će biti spojnice homolognih točaka paralelni pravci nego će se sjeći u istoj točki V (u vrhu piramide).

Stranica osnovke, na pr. $B''_1\, C''_1$, i pripadna stranica presjeka $B''\, C''$ sijeku se u točki 3 na tragu $r_2 = (\rho\, \Pi_2)$; isto tako imaju stranice $D''_1\, E''_1$ i $D''\, E''$ svoje sjecište 2 na r_2 i t. d.

Kosim. ili normalnim projiciranjem piramide i kojega njezina presjeka na ravninu ne mijenjaju se ti odnosi. Možemo zato reći:

Ako dva ravna višekuta u prostoru ili dva višekuta u istoj ravnini imaju takov položaj, da im spojnice homolognih vrhova idu istom točkom (projekcijom vrha piramide!), sjeći će se homologne stranice u točkama istoga pravca (r_2).

To se svojstvo zove kolinearna srodnost ili kolineacija u perspektivnom položaju. Zrake, koje prolaze točkom V, zovu se zrake kolineacije, a pravac r_2 os kolineacije. Pod „perspektivnim“ se položajem razumije to, da spojnice kolinearno-srodnih točaka idu sve istom točkom V, t. j. središtem kolineacije. Kad bismo dva lika iz toga položaja razmaknuli, bili bi oni još uvijek srodni (kao kod afiniteta), no ne bi bili više u „perspektivnom“ položaju.

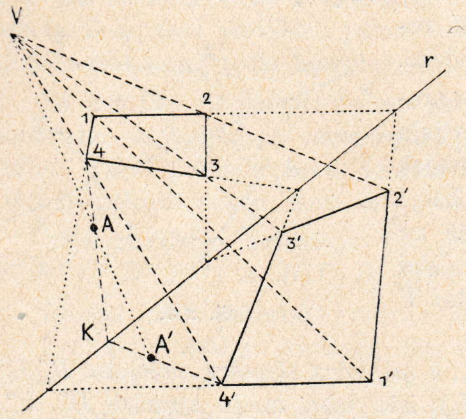
Kolinearno srodne mogu biti i dvije krivulje, na pr. kružnica i parabola ili kružnica i hiperbola (gl. sl. 199. i 200.). Kod afiniteta nije na pr. moguće, da kružnica i parabola budu afine krivulje, jer se kružni valjak ne može sjeći u paraboli.

Primjeri za kolinearnu srodnost sadržani su u sl. 192., 195., 197. a, 198., 199. i 200.

Ravan lik i njegova sjena za centralnu rasvjetu jesu kolinearni likovi za izvor svjetlosti kao središte kolineacije.

U slici 204. prikazana je kolineacija dvaju četverokuta 1 2 3 4 i 1' 2' 3' 4', gdje se već ne uzima u obzir na odnose kod piramide, nego se kolineacija shvaća kao poseban odnos u ravnini.

Kolinearna je srodnost jednoznačno određena, čim se zadade os r i središte V kolineacije, pa dvije kolinearne točke, n. pr. 4 i 4', gdje pravac 4 4' ide središtem V kolineacije. Za kojugod točku A ravnine dobit će se pripadna točka A', ako se povuče A 4 do sjecišta K na osi r, dalje spoji K s 4', a onda odredi sjecište A' toga pravca sa zrakom VA.



Sl. 204.

Kao i afinitet upotrebit će se kolineacija za brže određenje pojedinih presječnih točaka za piramidu ili stožac s ravninom. Ako jedan kolinearni poligon (ili krivulja) siječe os kolineacije, prolazit će tim točkama pripadne stranice drugoga poligona (ili druga kolinearna krivulja).

Zadaci za vježbu.

351.) Odredi afinitet nužnim elementima, konstruiraj elipsu kao afinu krivulju kružnice, pa odredi osi te elipse (gl. sl. 164.).

352.) Pokaži, da su dva simetrična lika (pogledom na os simetrije) afini likovi.

353.) Namjesti dva kongruentna četverokuta, koji nijesu simetrično položeni, tako da budu u afinitetu uz perspektivan položaj. Gdje je os afiniteta?

354.) Odredi presjek četverostrane piramide ravninom ρ tako, da nađeš probodište jednoga brida s ρ, a onda konstruiraj s pomoću kolinearne srodnosti ostale vrhove presječnog četverokuta.

355.) Namjesti kružnicu i parabolu tako, da obje krivulje budu kolinearne, pa odredi nekoliko točaka parabole zajedno s pripadnim tangentama (isp. sl. 199.).

356.) Povuci na parabolu u zadatku 355. tangente iz neke zadane točke P upotrebom kolinearne srodnosti. Potraži kolinearnu točku P_1 povuci iz P_1 tangente na kružnicu i nađi kolinearne pravce za te tangente!

357.) Zašto će četverokut, koji je u afinoj srodnosti s nekim kvadratom, biti paralelogram?

358.) Može li se kolineacija udesiti tako, da kolinearan lik za neki zadani nepravilni četverokut bude paralelogram? Isp. zadatak 330.

359.) U ravnini σ (3, 4, 3) zadana je kružnica; nađi sjenu te kružnice na Π_1 za izvor svjetlosti V, tako da sjena bude parabola. Upotrebi za određenje parabole kolinearnu srodnost!

360.) Odredi pravu veličinu onoga komada hiperbole, koji je predočen u sl. 200., pa upotrebi kod toga afinu srodnost za projekciju i za preložaj oko r_1 u Π_1.

III. Prodori tračnih tjelesa.

108. Općena pravila za određenje prodorâ. Dosada smo promatrali načine, kako se određuje presjek tijela ravninom; ostaje još, da ispitamo, kako se može naći presjek jednoga tijela drugim.

Dva tijela mogu imati takov položaj, da jedno ulazi potpuno na jednoj strani u drugo tijelo, a na drugoj strani opet izlazi. Kaže se, da se tjelesa prodiru. Presječna crta, koja će biti sastavljena od pojedinih pružaca, ako su oba tijela uglasta, ili od lukova prostorne krivulje, ako su oba tijela obla, imat će u tome slučaju dva posebna dijela. Gl. sl. 206. i 208.

Dva tijela mogu biti i tako položena, da jedno od njih siječe ono drugo samo djelomice, a da ne prolazi potpuno kroza nj. Ovdje presječna crta nije sastavljena od dva dijela, nego je ili zatvoren prostorni poligon, ako su oba tijela uglasta, ili zatvorena prostorna krivulja, ako su tjelesa obla. Gl. 205. ili 210.

Uopće će se presječna crta dvaju tračnih tijela naći tako, da se traže probodišta pojedinih izvodnica (kod uglastih tjelesa bridova) jednoga tijela s drugim i obrnuto probodišta izvodnicâ (bridova) drugoga tijela s prvim. Probodišta će se u projekcijama spojiti u slomljenu crtu ili u krivulju onim redom, kako su spojena na tjelesima u prostoru. Za to spajanje u projekcijama pokazat će se upute za pojedine slučaje, koji će se ovdje napose razjasniti u sl. 205.—210. Da se probodišta tračnih tjelesa odrede što jednostavnijim načinom, postupat će se onako, kako je istumačeno u § **16.** i **22.** Isp. i zadatak 307.

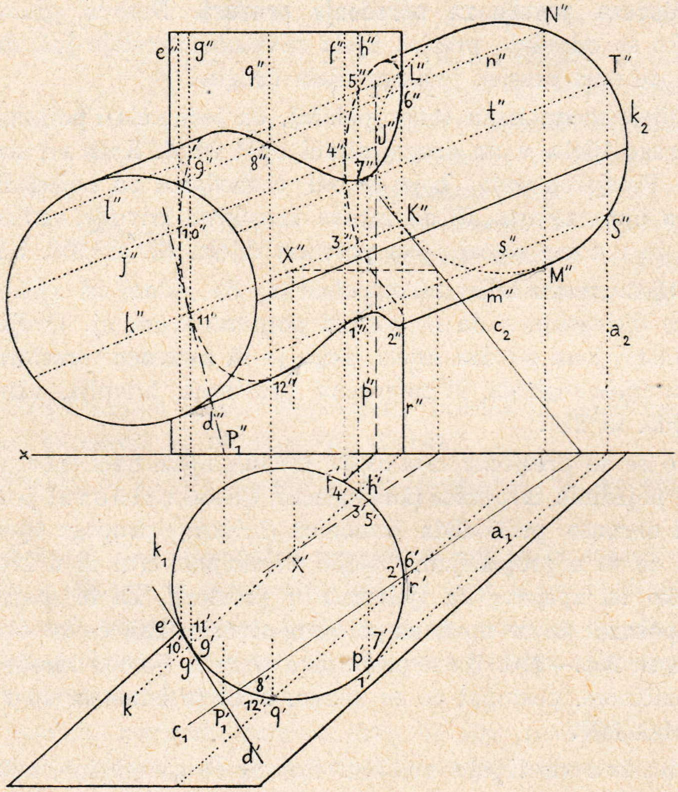
a) Obadva su tijela valjci. Položit će se ravnine, koje su paralelne s izvodnicama jednoga i drugoga valjka. Svaka će takva pomoćna ravnina sjeći svaki valjak u dvije izvodnice; četiri sjecišta tih izvodnica jesu zajedničke točke obadvaju valjaka pa zato pripadaju presječnoj crti.

b) Obadva su tijela prizme. Pomoćne će se ravnine položiti opet paralelno s bridovima obadviju prizama, no ne na kojemgod mjestu kao kod valjaka, nego upravo po bridovima jedne, a onda posebno i druge prizme. Tako će se dobiti probodišta za bridove jedne prizme s površinom one druge.

c) Obadva su tijela stošci ili piramide. Pomoćne će se ravnine polagati vrhovima obadvaju stožaca ili piramida. Kod piramida će te ravnine osim toga prolaziti po jednim bridom jednoga, a onda opet drugoga tijela.

d) Jedno je tijelo valjak, drugo stožac. Pomoćne će se ravnine polagati vrhom stošca paralelno s izvodnicama valjka.

e) Jedno je tijelo prizma, drugo piramida. Pomoćne ravnine prolazit će vrhom piramide paralelno s bridovima prizme, pa će svaka od njih sadržavati još i jedan brid piramide ili prizme.



Sl. 205.

Ako je jedna tračna površina obla, druga uglasta, bit će presječna njihova crta sastavljena od lukova, koji su presjeci obloga tijela s pobočkama uglastoga tijela.

Kod tračnih uglastih površina spajat će se dva i dva probodišta u stranice prostornoga poligona onda, ako su oba probodišta na istoj pobočki jednoga tijela i na istoj pobočki drugoga tijela. Tangenta u kojoj

točki presječne krivulje oblih tračnih površina dobit će se kao presječnica dodirnih ravnina, koje su u toj točki položene na jedno i na drugo tijelo.

U projekcijama će biti dijelovi (stranice ili lukovi) presječne crte onda vidljivi, ako su u toj projekciji vidljiva oba ona dijela jedne i druge površine, na kojima se nalazi dotična stranica ili luk presječne crte u prostoru. Ako je pak na pr. stranica presječnoga poligona na jednoj pobočki prvoga tijela, koja je u projekciji vidljiva, i ujedno na jednoj pobočki drugoga tijela, koja je u istoj projekciji nevidljiva (zakrivena), ne će pomenuta stranica u toj projekciji biti vidljiva.

Ako dvije oble tračne površine imaju u jednoj zajedničkoj točki i zajedničku dodirnu ravninu, prolazit će presječna krivulja dvaput tom točkom (dvotočka prostorne krivulje).

109. Prodor dvaju valjaka. U slici 205. zadana su dva kružna valjka, kojima su osnovke k_1 i k_2 u ravninama Π_1 i Π_2. Budući da je prvi valjak (osnovka k_1) uspravan, bit će pomoćne ravnine, položene paralelno s izvodnicama obadvaju valjaka, normalne na Π_1; njihovi će drugi tragovi $a_2, \ldots$ biti normalni na osi x, a prvi tragovi $a_1, \ldots$ paralelni s prvim projekcijama izvodnicâ drugoga valjka (osnovka k_2).

Položit ćemo jednu pomoćnu ravninu a_1, a_2 tako, da trag a_1 dotiče osnovku k_1. Dodirna je izvodnica na prvom valjku p', p''. Položena ravnina siječe drugi valjak u izvodnicama, koje imaju druge projekcije u s'' i t''. Presječne točke $p'' s''$ i $p'' t''$, t. j. točke $1''$ i $7''$, jesu druge projekcije dviju točaka na presječnoj krivulji; prve su projekcije $1'$ i $7'$ u p'. Budući da je p dodirna izvodnica prvoga valjka s ravninom a_1, a_2, imat će izvodnica s na p dvije veoma blize zajedničke točke s prvim valjkom, pa će zato s'' biti u točki $1''$ tangenta presječne krivulje. Isto vrijedi za točku $7''$ na t''. Poradi posve istih razloga bit će izvodnice e'' i f'' tangente za presječnu krivulju u točkama $10''$ i $4''$.

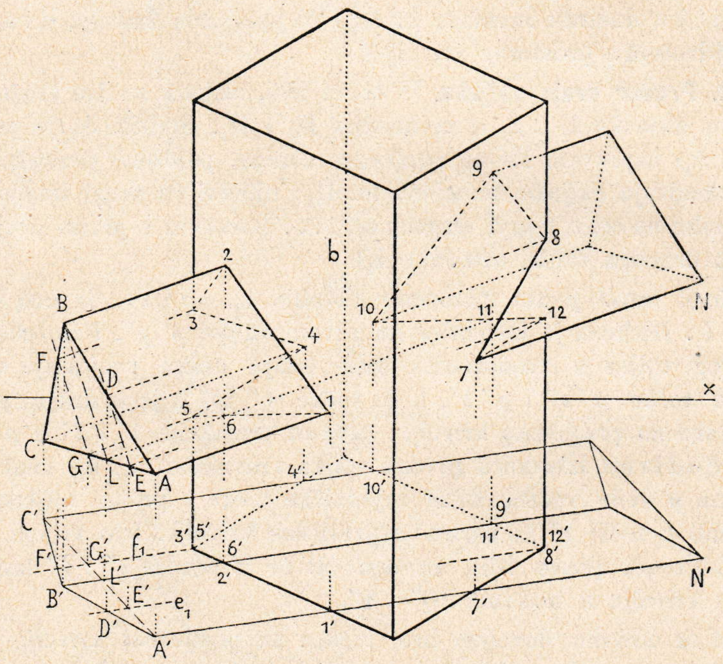
Kad se odredio dovoljan broj točaka na presječnoj krivulji, spojit će se te točke u drugoj projekciji u crtu, koja je u sl. 205. zatvorena. Na svakom valjku ima jedan dio, koji s drugim valjkom nema zajedničkih točaka.

Kako se pojedine točke imaju spajati, pokazuje ova tabela:

Točke na k_1:	p'	r'	h'	f'	h'	r'	p'	q'	g'	e'	g'	q'	p'
„ „ k_2:	S''	M''	K''	J''	L''	N''	T''	N''	L''	J''	K''	M''	S''
„ „ presječnoj krivulji:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1

U svakom vertikalnom stupcu naznačene tri točke određuju trokut, kojemu je jedan vrh (na pr. q') na k_1, a drugi je vrh (N'') na k_2, a treći vrh (8) na presječnoj krivulji. Jedna je stranica toga trokuta izvodnica prvoga valjka *(q)*, a druga je njegova stranica izvodnica drugoga valjka *(n)*.

Prvi horizontalni redak u tabeli pokazuje, kojim se smislom obilazi po osnovci k_1. Vidi se, da je početni smisao po luku osnovke od p' do f', dalje protivan smisao od f' preko p' do e', a onda opet prvašnji smisao od e' do p'. Na osnovci k_2 imamo najprije smisao od S'' preko K'' do T'', a onda upravo obrnut smisao od T'' preko K'' do S''. Time su se redom obašle obline na valjcima, koje daju sjecišnih točaka.



Sl. 206.

Onaj dio drugoga valjka, koji određuje tetiva $T'' S''$ i manji luk $T'' S''$ osnovke k_2, nema s prvim valjkom zajedničkih točaka. Iz prve pak projekcije izlazi, da onaj dio prvoga valjka, koji je određen tetivom $e' f'$ i manjim lukom $e' f'$ na osnovci k_1, ne daje s drugim valjkom zajedničkih točaka.

Izvodnice g i k valjaka sijeku se u točki 11 presječne krivulje. Hoćemo li odrediti tangentu d u toj točki na presječnu krivulju, položit ćemo na oba valjka tangencijalne ravnine po izvodnicama g i k. Prva će od tih ravnina imati prvi trag d', koji je tangenta na k_1 u g', druga će ravnina imati drugi trag c_2, koji je tangenta na k_2 u K''; prvi trag c_1 izlazi s pomoću

sutražnice za neku točku X na izvodnici k. Tragovi c_1 i d' sijeku u P'_1; spojnica je P''_1, $11 \equiv d''$ tražena tangenta presječne krivulje u točki 11.

110. Prodor dviju prizama. U kosoj projekciji (slika 206., prikrata po volji) nacrtana je uspravna četverostrana prizma i kosa trostrana prizma, od koje je predočena i projekcija na ravninu xy.

Pomoćne ravnine, koje će se polagati paralelno s bridovima obadviju prizama, bit će normalne na ravnini xy; njihovi će tragovi na xy imati isti smjer kao i projekcije bridova trostrane prizme, t. j. tragovi će biti paralelni s $A'N'$. Neka bude položena takva pomoćna ravnina kroz lijevi krajni brid četverostrane prizme, koji ima projekciju 3′ (ujedno 5′). Trag će te ravnine na xy biti pravac, koji projekciju $A'B'C'$ siječe u F' i G'.

Povuku li se ordinale za te dvije točke do dotičnih stranica BC i CA osnovke ABC u prostoru za trostranu prizmu, bit će FG trag položene pomoćne ravnine na ravnini osnovke ABC. Ostali će takvi tragovi BL, DE, . . . biti paralelni s FG. Prva projekcija trostrane prizme nacrtana je dakle zato, da se lako odrede tragovi pomoćnih ravnina na ravnini ABC.

Položena pomoćna ravnina sjeći će trostranu prizmu u izvodnicama $F3$ i $G5$; prema tomu će točke 3 i 5 na bridu vertikalne prizme biti točke presječnoga poligona obadviju prizama. Posve jednakim postupkom dobit će se dalje točke toga poligona.

Slijed točaka na osnovkama i na presječnom poligonu može se opet predočiti ovom tabelom:

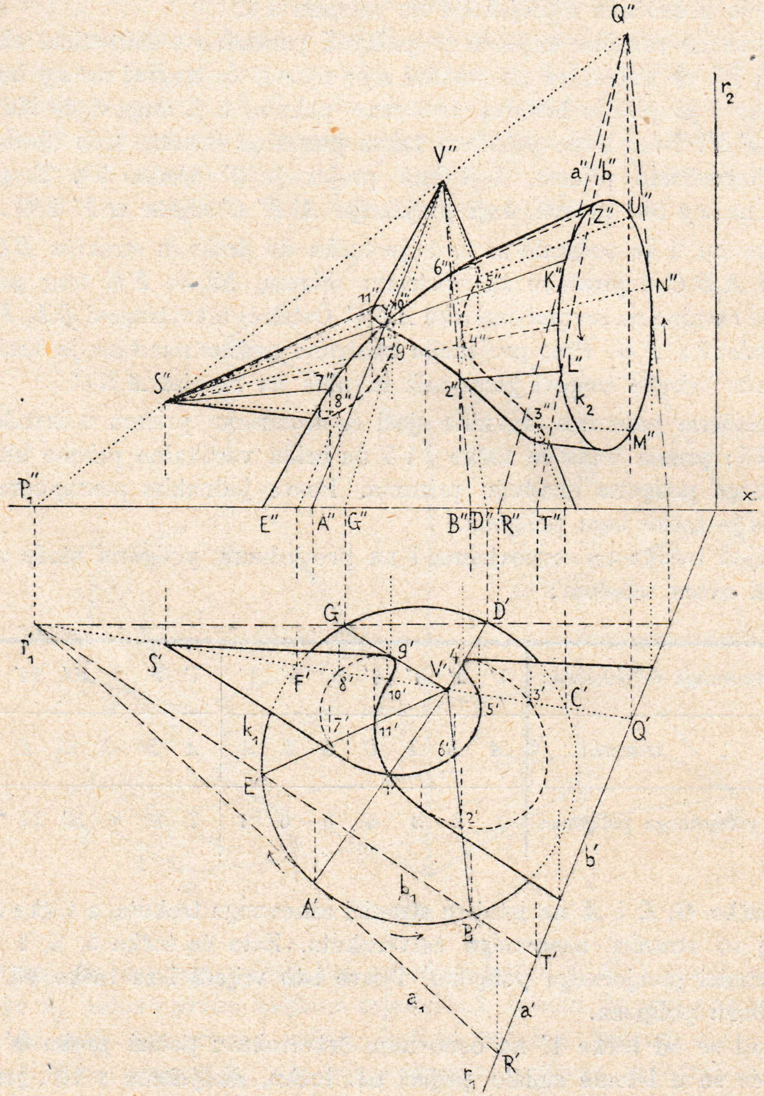
Točke osnovnoga četverokuta:	1′	2′	3′	4′	5′	6′	1′	7′	8′	9′	10′	11′	12′	7′
„ „ trokuta:	*A*	*B*	*F*	*C*	*G*	*L*	*A*	*A*	*D*	*B*	*C*	*L*	*E*	*A*
„ presječnoga poligona:	1	2	3	4	5	6	1	7	8	9	10	11	12	7

Točke G, L i A na istoj su stranici osnovnoga trokuta, a točke 5′, 6′, 1′ na istoj su stranici osnovnoga četverokuta. Zato će točke 5, 6, 1 biti na istoj stranici presječnoga poligona. Posve isto vrijedi i za točke 10, 11, 12 presječnoga poligona.

Kad se od točke 1′ na osnovnom četverokutu polazi preko 2′ i 3′ do 4′, ne će se u istome smislu prijeći na točku, obilježenu s 10′, jer je između 4′ i 10′ brid b prve prizme, koji s drugom prizmom ne daje sjecišnih točaka. Od točke 4 ne polazi dakle preko brida b nikakva stranica presječnog poligona, nego se od točke 4 okreće opet prema točki 5 u protivnom smislu natrag. Isti se odnosi javljaju za točke 1′ i 7′. Prema tome

će presječni poligon biti sastavljen od dva posebna dijela. U tabeli su grupe točaka za oba dijela rastavljene vertikalnim potezom.

Bilješka. U slici 206. paralelni su ovi pravci: 1 2 i 8 9; 1 5 i 10 12; 2 3 i 9 10; 7 12 i 4 5. Zašto?



Slika 207.

111. Prodor dvaju stožaca. Osnovka je jednoga stošca kružnica k_2 u Π_1; vrh mu je V', V''. Osnovka k_1 drugoga stošca izabrana je u ravnini $\rho \perp \Pi_1$;

vrh je toga stošca S', S''. Spojnica vrhova S i V siječe Π_1 u P'_1, a ravninu ρ u točki Q', Q''. Pomoćne će ravnine imati tragove na Π_1, koji idu točkom P'_1, i tragove na ravnini ρ, koji idu točkom Q. Oba su stošca tako položena, da imaju zajedničku dodirnu ravninu; ta ravnina ima na ρ trag $a = QK$, a na Π_1 trag a_1. Dodirna je izvodnica za prvi stožac AV, a za drugi SK. Te se dvije izvodnice sijeku u dvotočki 1 presječne krivulje (isp. § **108.**). Položimo li pomoćnu ravninu, kojoj je trag na Π_1 pravac b_1, bit će njezin trag na ρ pravac b, kojemu je druga projekcija $b'' = T'' Q''$. Trag b_1 siječe osnovku k_1 u točkama B' i E'; pripadna će dakle pomoćna ravnina sjeći prvi stožac u izvodnicama BV i EV. Ista ravnina siječe osnovku k_2 u točkama L i Z, dakle drugi stožac u izvodnicama LS i ZS. Četiri sjecišta tih dvaju parova izvodnicâ jesu točke, koje su određene u nacrtu, t. j. $2''$, $6''$, $7''$ i $11''$; prve projekcije izlaze ordinalama. Posve istim načinom dobit će se i ostale točke presječne krivulje.

Pođe li se na k_1 od točke A' u smjeru prema B', C' do D', onda obrnutim smjerom od D' preko A' do G', a napokon prvašnjim smjerom od G' preko F', E' do A', pa ako se u isto vrijeme pođe na k_2 od K'' u smjeru strjelice dvaput naokolo, dobit će se redom pojedine sjecišne točke za presječnu crtu, kako izlazi iz ove tabele:

Na osnovci k_1:	A'	B'	C'	D'	C'	B'	A'	E'	F'	G'	F'	E'	A'
„ „ k_2:	K''	L''	M''	N''	U''	Z''	K''	L''	M''	N''	U''	Z''	K''
Točke presjeka:	1	2	3	4	5	6	1	7	8	9	10	11	1

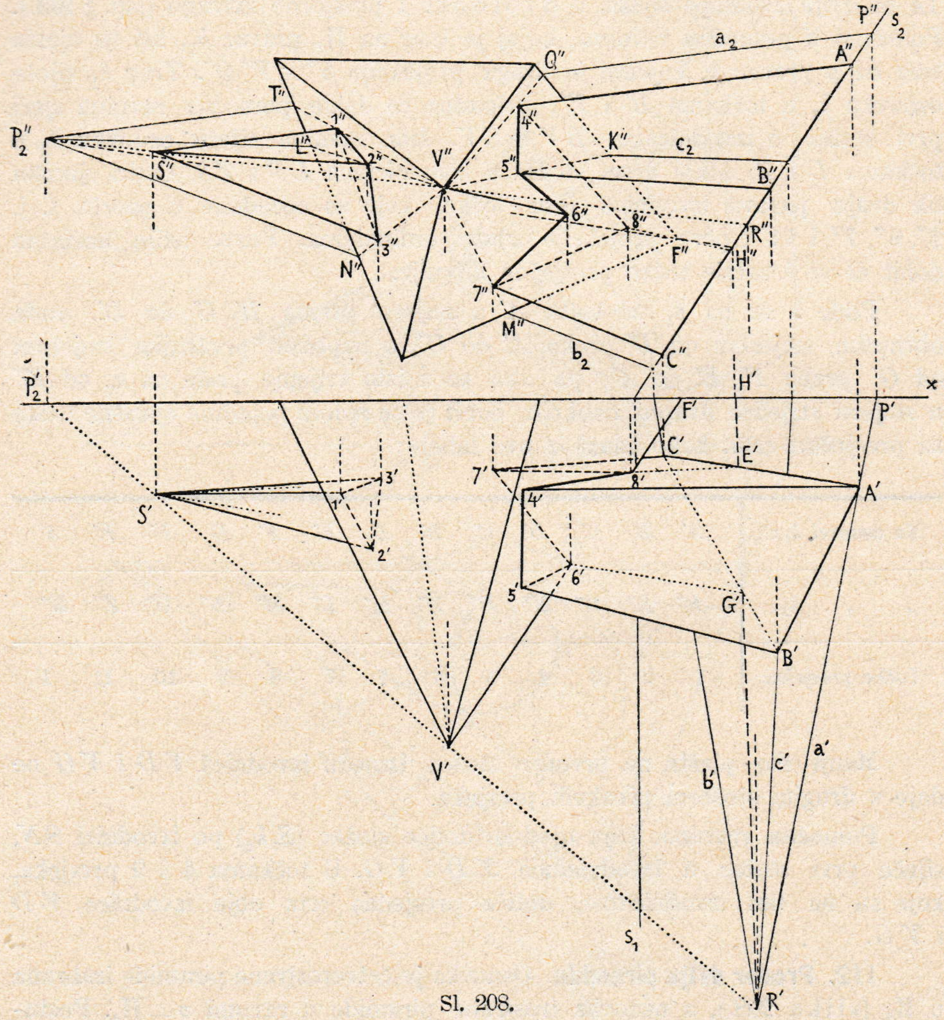
Manji dio plašta na prvome stošcu između izvodnicâ VD i VG ne daje s drugim stošcem nikakvih presjeka.

Pomoćna ravnina, koja ujedno dotiče stožac (S, k_2) po izvodnici SN, siječe prvi stožac u izvodnicama VD i VG. U točkama 4 i 9 presjeka, koje su na tim izvodnicama, dotiče presječna crta obje izvodnice VD i VG.

112. Prodor dviju piramida. Osnovka je četverostrane piramide izabrana u Π_2 (slika 208.), a osnovka trostrane piramide u ravnini $\sigma \perp \Pi_2$. Postupak za određenje presječne crte bit će isti kao za presjek dvaju stožaca. Spojnica vrhova V, S obadviju piramida siječe Π_2 u točki P'_2, P''_2, a ravninu σ u točki R', R''. Pomoćne ravnine, položene spojnicom VS, imaju na σ tragove $a', b', \ldots$ a na Π_2 tragove $a_2, b_2, \ldots$ Ravnina, kojoj su tragovi a' i a_2, a položena je po bridu SA druge piramide, siječe osnovni četverokut

*

prve piramide u točkama Q'' i T''. Izvodnice VQ i VT na prvoj piramidi sijeku brid SA u točkama 4 i 1, koje su dobivene u drugoj projekciji, a onda ordinalama određene u prvoj projekciji. Isto su tako ravninama, koje imaju na σ i Π_2 tragove b', b_2 i c', c_2, određena probodišta 3, 7, i 2, 5 na izvodnicama VN, VM i VL, VK u drugoj projekciji.



Sl. 208.

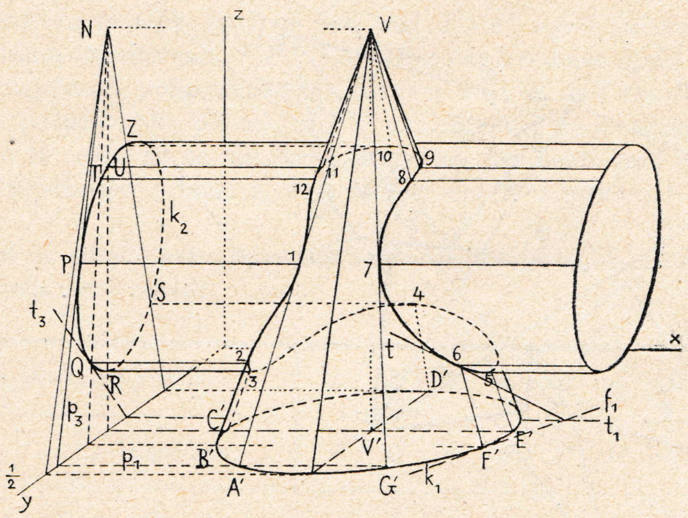
Tri brida četverostrane piramide ne daju s drugom piramidom probodišta. Kroz četvrti brid VF položena je pomoćna ravnina, koja trostranu piramidu siječe u izvodnicama ES i GS. Sjecišne točke $8 = ES, FV$ i $6 = GS, FV$ pripadaju presječnoj crti.

Pojedine su sjecišne točke spojene prama slijedu, koji je naznačen ovdje u tabeli.

Trostrana piramida;	A'	B'	C'	A'	B'	G'	C'	E'	A'
Četverostrana „	T''	L''	N''	Q''	K''	F''	M''	F''	Q''
Presječna crta:	1	2	3	4	5	6	7	8	4

Točke E'' i G'' na s_2, a ni izvodnice $E''\,S''$, $G''\,S''$, nijesu unesene u sliku; one daju projekcije $8''$ i $6''$ presjeka.

113. Prodor valjka i stošca. U kosoj projekciji (slika 209.), *pr.* $\frac{1}{2}$, zadan je uspravan valjak, kojemu je osnovka k_2 u ravnini yz i uspravan stožac, koji ima osnovku k_1 u ravnini xy.

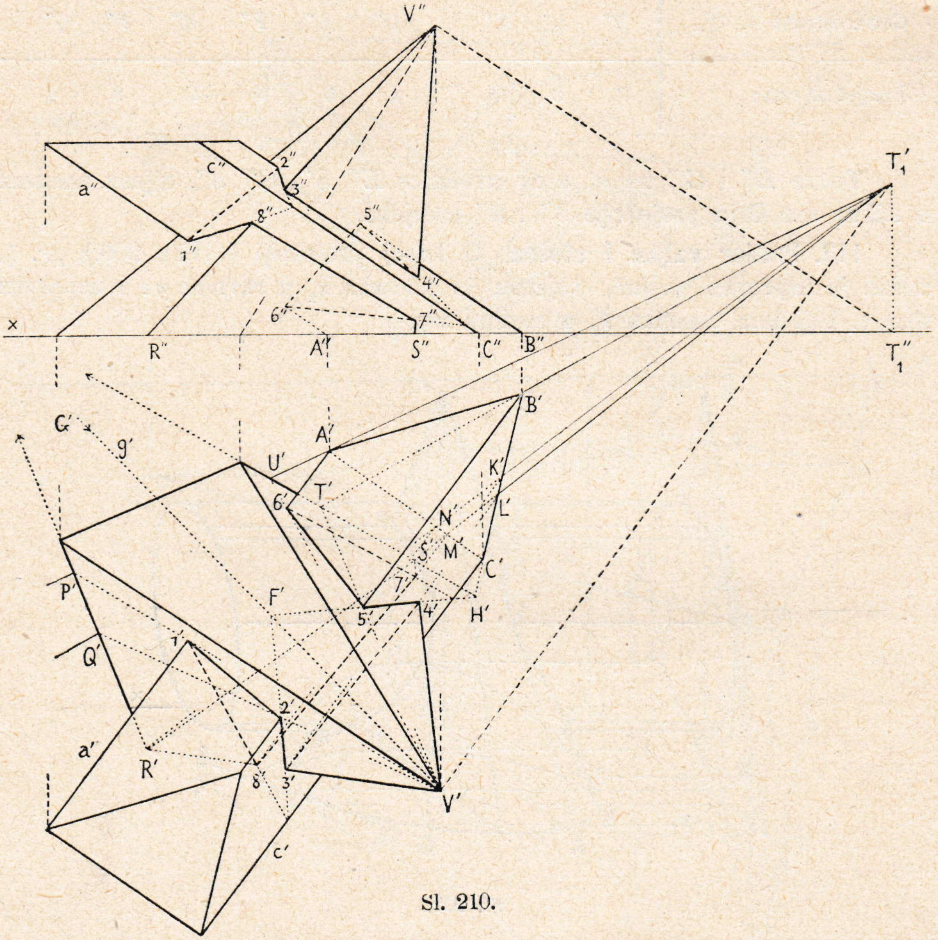


Sl. 209.

Budući da se pomoćne ravnine moraju položiti vrhom V stošca paralelno s izvodnicama valjka, koje su normalne na ravnini yz, prolazit će sve normalom $VN \perp yz$. (Točka je N projekcija vrha V na ravninu yz).

Pojedine pomoćne ravnine bit će određene trećim tragovima, koji idu točkom N u ravnini yz, na pr. tragom p_3, i prvim tragom, koji je paralelan s izvodnicama valjka, t. j. tragom p_1. Ravnina p_3, p_1 dotiče valjak po izvodnici, koja ide diralištem P osnovke k_2, a stožac će sjeći u izvodnicama

A V i *G V*. Te će izvodnice sjeći pomenutu dodirnu izvodnicu valjka u točkama 1 i 7, koje pripadaju presječnoj crti. S razloga, koji su spomenuti u § 109., bit će ovdje izvodnica *A V* tangenta presječne krivulje u točki 1, a izvodnica *G V* tangeta u točki 7. Dvije će pak izvodnice valjka biti tangente presječne crte u točkama 4 i 10.



Sl. 210.

Određene sjecišne točke spojit će se u krivulju prema ovoj tabeli:

Točke na k_1:	A'	B'	C'	D'	E'	F'	G'	F'	E'	D'	C'	B'	A'
„ „ k_2:	P	Q	R	S	R	Q	P	T	U	Z	U	T	P
„ presjeka:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1

Na valjku i na stošcu ima dijelova, koji ne daju presjeka s onom drugom površinom; zato će presječna krivulja biti zatvorena i nerazdijeljena. Dodirna ravnina valjka, položena po izvodnici kroz Q, imat će na yz trag t_3, koji je tangenta osnovke k_2 u točki Q; prvi će trag te ravnine biti pravac t_1, paralelan s osi x. Dodirna ravnina stošca po izvodnici FV imat će prvi trag f_1, koji je tangenta osnovke k_1 u točki F'. Budući da obje dodirne ravnine prolaze točkom 6 presjeka, sjeći će se u pravcu t, koji je tangenta presječne crte u točki 6. Kosa će se projekcija tangente t dobiti kao spojnica točke 6 sa sjecištem tragova t_1 i f_1.

114. Prodor prizme i piramide. Četverostrana piramida i trostrana prizma (slika 210.) imaju svoje osnovke u ravnini Π_1. Povuče li se vrhom V piramide paralela s bridovima prizme, pa se odredi tlocrtno probodište T''_1 te paralele, prolazit će svi prvi tragovi pomoćnih ravnina probodištem T''_1 i pojedinimi vrhovima obadviju osnovaka zadanih tjelesa.

Bilješka. Budući da su u tome slučaju obje osnovke u ravnini π_1, dolaze u obzir samo prvi tragovi pomoćnih ravnina.

Pomoćna ravnina, kojoj je prvi trag $T'_1 A'$, siječe prizmu u bridu a, a piramidu u izvodnicama VP i VU. Obje ove izvodnice sijeku a u točkama 1 i 6 presječnoga poligona. Istim načinom naći će se i drugi vrhovi presječnoga poligona. Na pobočki PRV piramide nalaze se točke 1 i 3 presjeka, no te točke ne će biti izravno spojene, jer jedan brid prizme siječe pomenutu pobočku u točki 2, koja se ima spojiti s točkom 1 i opet s točkom 3.

Kad se odrede sva probodišta bridova jednoga tijela s drugim, spojit će se prema ovoj tabeli:

Točke osnovnoga trokuta:	A'	B'	K'	L'	B'	A'	M'	N'	A'
„ „ četverokuta:	P'	Q'	R'	S'	T'	U'	S'	R'	P'
„ presječnoga poligona:	1	2	3	4	5	6	7	8	1

Vrh C' osnovnoga trokuta nije sadržan u tabeli, jer brid prizme, koji ide vrhom C', ne siječe piramide, što se jasno razabira u nacrtu.

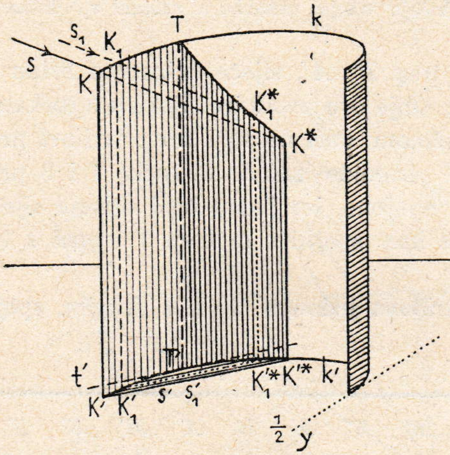
Pobočka prizme, koja ima trag $B'C'$ na Π_1, i pobočka piramide, kojoj je trag $U'S'$, sijeku se u pravcu 45. Taj će pravac prolaziti sjecišnom točkom H' obadvaju tragova $B'C'$ i $U'S'$. Istim se načinom mogu kontrolirati i presječnice drugih parova pobočaka zadanih tjelesa.

Obje pobočke piramide: USV i PRV imaju na Π_1 tragove $U'S'$ i $P'R'$; sjecište G' tih tragova spojeno s vrhom V daje presječnicu g obadviju

pomenutih pobočaka. Budući da pobočka prizme, za koju je $B' C'$ trag, siječe navedene dvije pobočke piramide u pravcima 4 5 i 2 3, sjeći će se oba ta pravca u točki F na presječnici g. Takovom se kontrolom ispituje točnost konstrukcije za presječni poligon.

115. Bačene sjene u nutarnjost valjka i stošca. Bačena sjena u nutarnjost piramide, određena u sl. 158., može se shvatiti i kao prodorna crta piramide s onom prizmom, koju čine paralelne zrake svjetlosti, položene pojedinim vrhovima na osnovci piramide. Pravci SE, SF, . . . u sl. 158. nijesu drugo negoli tragovi pomoćnih ravnina na ravnini osnovke za piramidu. Pomoćne su pak ravnine položene pravcem SV, koji ide vrhom V piramide, pa je paralelan s bridovima prizme, t. j. s paralelnim zrakama svjetlosti. Postupak je dakle isti kao u § **114.**

1. U slici 211. određena je bačena sjena u nutarnjost stražnje polovine valjka, prikazana u kosoj projekciji. Zraka svjetlosti ima smjer s u kosoj projekciji i prvu projekciju s'. Položi li se na osnovku k' tangenta $t' \parallel s'$, prolazit će diralištem ona izvodnica valjka, koja je rastavnica za svijetli i tamni dio vanjske njegove površine. Rastavnica siječe gornju osnovku u točki T. Luk KT gornje osnovke bacat će sjenu u nutarnjost valjka od T prema $K_1{}^*$ do K^*. Taj je komad krivulje prodor zadanoga valjka s onim kosim valjkom, što ga čine zrake svjetlosti, položene pojedinim točkama luka KT.



Sl. 211.

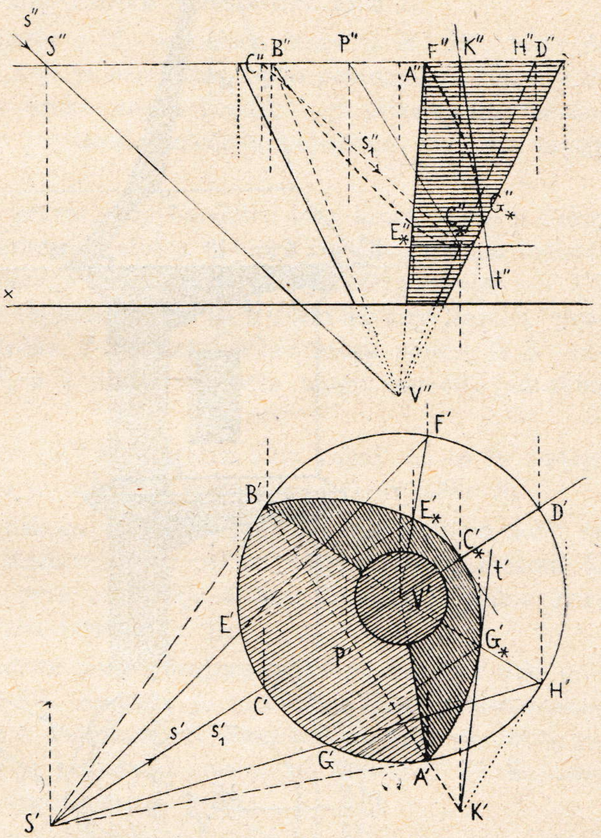
Položi li se zraka s točkom K, a projekcijom K' projekcija s' te zrake, sjeći će s' osnovku po drugi put u K'^*; vertikala pak u toj točki daje u sjecištu na s sjenu K^* točke K na plašt valjka. Isto se tako dobiva i sjena $K_1{}^*$ i t. d. Isp. postupak u § **105.**, *1.*

Bilješka. U nauku o površinama dokazuje se, da će se na pr. dva valjka 2. reda, koji imaju zajedničku ravnu krivulju *(k)*, sjeći još u drugoj ravnoj krivulji. U sl. 211. bit će ta druga krivulja elipsa, od koje je $TK_1{}^* K^*$ jedan dio.

2. Za uspravni prikraćeni stožac, kojemu je manja osnovka u ravnini Π_1, određena je bačena sjena u nutarnjost na slici 212. Postupak je ovdje posve isti kao u sl. 158. za piramidu.

Zraka svjetlosti s', s'', položena vrhom V', V'' stošca, siječe ravninu gornje osnovke u točki S', S''. Polože li se iz S obje tangente SA i SB

na gornju osnovku, bit će A i B pripadna dirališta, a izvodnice AV i BV stošca r a s t a v n i c e. Nutarnji dio $VACB$ stošca bit će u sjeni. Luk ACB gornje osnovke bacat će sjenu u nutarnjost stošca. Položi li se točkom C toga luka zraka svjetlosti s'_1, s''_1, sjeći će ona stožac u točki izvodnice VD; ta se sjecišna točka C'_*, C''_* dobiva u drugoj projekciji, ako se prije odredi 2. projekcija $V''D''$ pomenute izvodnice. Sjena u nutarnjosti polazit će od A prema C_* do B. U prvoj je projekciji taj luk simetričan prema $S'D'$, jer je i stožac i luk ACB simetričan prema ravnini, koja sadržava SD, a stoji normalno na Π_1. Tangenta na sjenu u točki C'_* bit će paralelna s $A'B'$, dakle u prostoru horizontalna; njezina je druga projekcija paralelna s osi x.

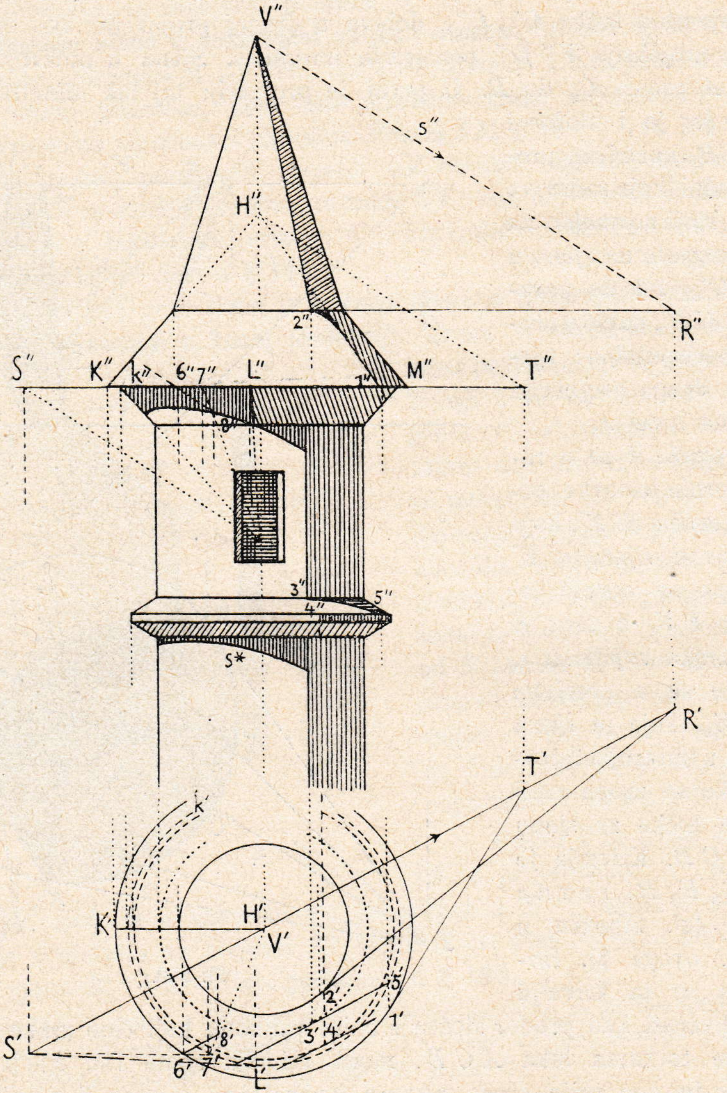


Sl. 212.

Povuče li se u ravnini gornje osnovke kakvagod zraka $S'F'$, koja tu osnovku siječe u E' i F', pa se odredi izvodnica FV, a kroz E položi zraka svjetlosti s, dobit će se u presjeku točka E_*, koja je sjena točke E u nutarnjost stošca. Tako se mogu naći i ostale točke za sjenu luka ACB. Krivulja je $AG_*C_*E_*B$ r a v n a krivulja (gl. bilješku u točki *1.* ovoga §). Budući da se ta krivulja može shvaćati kao prodor stošca s onim valjkom, koji čine zrake svjetlosti, položene točkama luka ACB, mora krivulja sjene biti e l i p a, i to zato, jer je ona prije svega r a v n a k r i v u l j a, a onda, jer se nalazi na kružnom v a l j k u.

Budući da je točka P' poradi simetrije sredina za tetivu $A'B'$, bit će P'' sredina za pružac $A''B''$. Spojnica je $P''C''_*$ dijametar za drugu projekciju sjene.

Prema tomu će tangente za tu sjenu A i B imati sjecište na PC_* (isp. zad. 361.). Tangenta sjene u točki G_* odredit će se tangentom osnovke u H' i točkom K na pravcu AB. Taj pravac nije drugo negoli trag ra-



Sl. 213.

vnine, u kojoj se nalazi krivulja sjene (elipsa), na ravnini gornje osnovke. Istim će se načinom odrediti tangente za tu krivulju u drugim njezinim točkama.

116. Bačene sjene složenoga obloga tijela. U slici 213. prikazano je tijelo (toranj), složeno od valjaka i stožaca.

Za najgornji stožac naći će se rastavnica $V2$ poznatim načinom s pomoću zrake svjetlosti $s = VR$ i točaka R i 2 u ravnini osnovke toga stošca, gdje je pravac $S'R'$ prva projekcija zrake svjetlosti. Istim se načinom dobiva rastavnica za donji (prikraćeni) stožac točkom 1; ta je rastavnica određena točkom T, gdje je $HT \parallel VR$ zraka svjetlosti. Za donji prikraćeni i prevrnuti stožac izlazi s pomoću točke S rastavnica kroz L.

Obodnica kruga, koja je u Π_2 prikazana dužinom $K''M''$, bacit će sjenu na prikraćen stožac, koji je namješten ispod pomenutoga kruga. Određenje te sjene nije opet drugo negoli prodor toga prikraćenoga stošca s valjkom, koji čine zrake svjetlosti, položene pojedinim točkama onoga kruga ($K''M''$).

Povuče li se kroz S' pravac, koji obodnicu toga kruga siječe u nekoj točki $6'$, a osnovku k' prikraćenog stošca u točki $7'$, povući ćemo točkom $7'$ izvodnicu prikraćenog stošca, a točkom $6'$ zraku svjetlosti paralelno s $S'V'$. Povučena izvodnica i zraka svjetlosti sijeku se u točki $8'$, koja znači 1. projekciju za bačenu sjenu točke 6 na plašt prikraćenoga stošca. Iz $8'$ određena je 2. projekcija $8''$, a i druge se točke mogu odrediti jednakim načinom.

Bačena sjena obodnice ($K''M''$) prelazi i na valjak pa se tu sastaje sa samosjenom valjka, koja je omeđena rastavnicom (kroz točku 3).

Sjena s^* izbočenoga uskoga valjka na najdonji valjak tijela dobit će se posve istim načinom. Rastavnica na uskom valjku prolazi točkom 4, koja se dobiva s pomoću prve projekcije $4'$ kao dirališta pripadne kružnice i smjera, koji ima zraka svjetlosti u Π_1.

Dalje se javlja još bačena sjena gornjega valjka na izbočeni uski prikraćeni stožac (u slici kod $5''$). Kontura je te bačene sjene prerez pomenutoga prikraćenoga stošca s dodirnom ravninom valjka, koja ga dotiče po rastavnici (točkom 3). Prva je projekcija prereza na pravcu $3'5'$. Kontura je dakle od $3''$ do $5''$ luk hiperbole (gl. § **99.**).

Napokon će još najgornji stožac baciti sjenu na prikraćen stožac ispod njega. Ta će sjena polaziti od $2''$, bit će u našem slučaju luk hiperbole, a dobit će se kao presjek prikraćenoga stošca s dodirnom ravninom gornjega stošca po rastavnici $2V$. (Isp. zadatak 362.). Takova se bačena sjena javlja i u sl. 184 Nadopuni tu sliku s obzirom na sjenu, koja tamo nije određena !!

Bilješka. Određenje prodorâ osobito je znatno u tehnici strojeva, gdje se pojedini dijelovi i njihovi presjeci moraju u projekcijama točno odrediti, da se onda iz tih projekcija prirede pojedini komadi iz materijala tako, da potpuno pristaju jedan uz drugi.

Zadaci za vježbu.

361.) Odredi u sl. 212. trag ravnine, u kojoj je eliptička sjena $A G_* C_* E_* B$, pa nađi tangente za prvu i drugu projekciju te sjene u točkama A i B. Upotrebi dodirne ravnine stošca po izvodnicama $A V$ i $B V$.

362.) Nacrtaj posebno i povećano projekcije obadvaju stožaca (s vrhovima V i H) u slici 213., pa odredi hiperbolički luk bačene sjene gornjega stošca na donji. Nađi trag dodirne ravnine po rastavnici $V 2$ na ravnini osnovke donjega stošca, a onda postupaj kao u § 104.

363.) Odredi presječnu crtu dvaju valjaka, koji imaju dvije zajedničke dodirne paralelne ravnine. Presjek će biti sastavljen od dvije elipse, koje su u različnim ravninama, a sijeku se u dvije točke (t. j. u diralištima zajedničkih dodirnih ravnina).

364.) Odredi presječnu crtu uspravnoga kružnoga stošca i uspravnoga valjka, ako su osi tih tjelesa mimosmjerne i priklonjene pod pravim kutom. Udesi položaj tako, da oba tijela imaju jednu zajedničku dodirnu ravninu.

365.) Nađi presječnu crtu dvaju nejednakih uspravnih valjaka, kojima su osi mimosmjerni pravci, priklonjeni pod pravim kutom. Udesi položaj tako, da se presjek raspadne na dva dijela (zatvorene prostorne krivulje).

366.) Odredi presjek dvaju kosih valjaka, kojima su osnovke kružnice u Π_1, i koji su tako položeni, da je presjek samo jedna zatvorena krivulja.

367. Zadan je uspravan stožac, kojemu je osnovka kružnica u ravnini $\sigma \parallel \Pi_1$, a vrh u Π_1, dalje kosi kružni valjak, koji ima osnovku u Π_1. Nađi presječnu crtu tih površina.

368.) Prikaži prodor u slici 205. u kosoj projekciji ($\alpha = 30^0$, $pr.\ \frac{1}{2}$).

369.) Prikaži prodor u slici 206. u ortogonalnoj projekciji.

370.) Odredi sjenu u nutarnjost uspravnoga poluvaljka u ortogonalnoj projekciji za $\sphericalangle s'' x = \sphericalangle s' x = 45^0$. Isp. sl. 211.

371.) U Π_1 zadana su dva koncentrična pravilna šesterokuta. Vanjski šesterokut ima stranicu $a = 3$; dvije su mu stranice paralelne s osi x. Nutarnji šesterokut ima stranicu $b = 2$, dvije su mu stranice okomite na osi x. Nad prvim se šesterokutom uzdiže uspravna piramida, kojoj je visina $v = 4$, a nad drugim uspravna piramida, koja ima visinu $h = 8$. Odredi presjek tih piramida. Položi pomoćne ravnine osju tih piramida.

372.) Odredi presjek kocke, kojoj je jedna pobočka u Π_1, s kosom piramidom, kojoj je osnovka trokut u Π_2, a vrh u Π_1.

373.) Zadan je kosi valjak, kojemu je osnovka kružnica u Π_1; njegova jedna izvodnica neka bude ujedno izvodnica uspravnoga stošca, kojemu je osnovna kružnica opet u Π_1. Odredi presjek tih tjelesa.

374.) U ravnini Π_2 zadana je kružnica k; krajevi dijametra, koji je paralelan s osi x, jesu projekcije obadvaju vrhova za stošce jednakih visina, kojima je k zajednička osnovka. Odredi presjek tih stožaca u pobočnoj 3. projekciji.

375.) Kontura bačene sjene na lijevoj strani u sl. 160. može se shvatiti kao presjek horizontalnih prizama s prizmom, što je čine zrake svjetlosti, položene točkama 1, 3, 4, 5. Odredi tu konturu s pomoću prodorā.

376.) Nađi presječni poligon, u kojemu kosa trostrana prizma (osnovka u Π_1) siječe pravilni oktaedar, koji ima jedan vrh u Π_1, a pripadna mu je os normalna na Π_1. Oktaedar će se uzeti kao tijelo složeno od dvije piramide!

377.) Na gornju osnovku uspravnoga valjka, kojemu je osnovka kružnica u Π_1 ($r = 3$), postavljena je koncentrično cilindrična ploča ($r_1 = 4{\cdot}5$), kojoj je visina četvrti dio visine valjka. Odredi bačenu sjenu ploče na valjak.

378.) Dva jednaka uspravna poluvaljka namještena su tako, da im se osi sijeku pod kutom od 90^0, pa da njihove obline imaju zajedničku dodirnu ravninu u točki K. Obje su osi paralelne s Π_1, jedna čini s Π_2 kut $\beta = 60^0$. Neka se prikažu presječne crte u ortogonalnoj projekciji, a onda u kosoj projekciji ($\alpha = 45^0$, *pr.* $\frac{1}{3}$). Takovi presjeci dolaze kod građevina u obliku svodova.

379.) Prikaži sliku 207. u kosoj projekciji, $\alpha = 30^0$, *pr.* $\frac{1}{2}$.

380.) Odredi presječnu crtu za dva jednaka pravilna tetraedra, koji imaju zajedničko središte, a jedna je pobočka prvoga tetraedra paralelna s Π_1.

381.) Namjesti u sl. 209. valjak tako, da točke 1 i 7 presječne crte padnu zajedno.

382.) Dva sukladna uspravna kružna stošca imaju paralelne osi. Odredi njihov presjek, koji će biti hiperbola.

383.) Namjesti oba tijela u sl. 210. tako, da brid RV piramide siječe brid c prizme, pa nađi projekcije presjeka za taj položaj.

Četvrti odsjek.

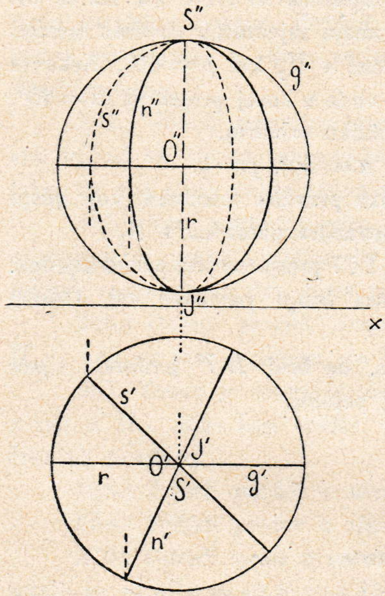
Kugla, rotacione površine i krivulje 2. reda.

I. Predočivanje kugle i rotacionih površina.

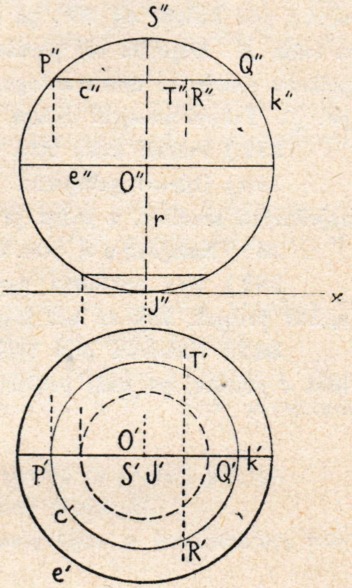
117. Izvođenje i normalne projekcije kugle. Površina je kugle takva obla površina, za koju je svaka njezina točka jednako udaljena od čvrste točke, t. j. središta. Takva se udaljenost zove polumjer (radius) kugle.

Ako se vertikalno postavljena kružnica okrene oko svoga vertikalnoga dijametra za 180^0, opisat će ona za okretanja površinu kugle. Iz toga postanka

kugline površine izlazi naime pomenuto svojstvo kugle. U svakom položaju, koji kružnica zauzima za vrijeme toga okretanja, zove se meridijan kugle. Onaj meridijan g'', g' (slika 214.), koji je paralelan s ravninom Π_2, zove se glavni meridijan. Svi meridijani prolaze dvjema čvrstim točkama, t. j. krajevima vertikalnoga dijametra, oko kojega se okreće kružnica; te se točke zovu polovi S i J. Prve projekcije meridijanâ jesu prušci jednaki dijametru SJ; svi imaju zajedničku sredinu u točki S' (ili J'), u kojoj su ujedinjene prve projekcije polova. Prema tome je prva projekcija kugle omeđena kružnicom, kojoj je točka $S' \equiv J' \equiv O'$ središte, a polumjer joj



Sl. 214.



Sl. 215.

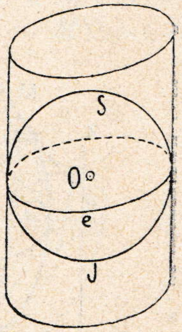
je isti, koji ima i kružnica, što se okretala. Druge su projekcije meridijanâ elipse; velika im je os $S''J''$ zajednička, a mala se os dobiva ordinalama iz prvih projekcija meridijanâ.

Kuglina površina može postati i drugim načinom. Zamislimo vertikalno položenu kružnicu k, koja ima vertikalni dijametar SJ i polumjer r. Svaka kružnica c, kojoj je ravnina normalna na SJ, a središte joj je na prušcu SJ, pa koja siječe zadanu kružnicu k u dvije (na c dijametralno protivne) točke P i Q (slika 215.), bit će na kuglinoj površini, za koju je k meridijan, a polumjer r. Budući da točke P i Q imaju od središta O kugle daljinu r, imat će tu istu daljinu od O i sve ostale točke na c, pa time izlazi ono isto svojstvo kugle, koje je sprijeda spomenuto. Sve među sobom

paralelno položene kružnice $c, c_1, c_2, \ldots$ zovu se usporednici ili paralelnici. Usporednici imaju različne polumjere; najmanji polumjer (ništicu) ima onaj, koji ide točkom S ili J, a najveći je onaj (polumjer r), kojemu ravnina prolazi središtem O kugle. Najveći se usporednik zove e k v a t o r e. Prva je projekcija kugle krug, kojemu je periferija prva projekcija ekvatora. Dva i dva prema ravnini ekvatora simetrično položena usporednika imaju jednake polumjere.

One kružnice na kuglinoj površini, koje imaju isti polumjer kao i kugla, zovu se n a j v e ć e kružnice; njihovo je središte u središtu O kugle. Prema tome su s v i meridijani, a od usporednikâ s a m o ekvator, n a j v e ć e kružnice. Svaka ravnina σ, koja ide središtem kugle, siječe kuglinu površinu u n a j v e ć o j kružnici. Sve će naime točke presjeka kugline površine s ravninom σ imati od središta jednake daljine r. Presječna je dakle krivulja kružnica, koja ima isti polumjer r kao i kugla. Svaka najveća kružnica k_1 na kugli može postati ekvatorom ili meridijanom; treba samo kuglu postaviti tako, da kružnica k_1 bude paralelna s Π_1 ili vertikalno položena. Zato može i svaka točka na kuglinoj površini postati polom.

Kad se kugla izvodi okretanjem kružnice k oko dijametra SJ, možemo na k položiti tangentu $t \parallel SJ$. Kod okretanja će t opisati uspravni valjak, koji će kuglu doticati u najvećoj kružnici $e \perp SJ$, t. j. u ekvatoru. Taj je valjak kugli o p i s a n. (S l i k a 216.).



Sl. 216.

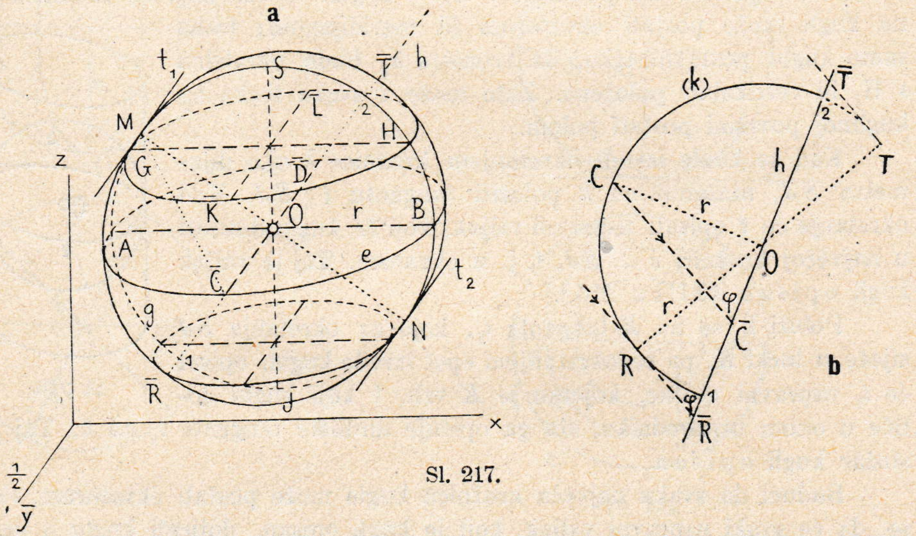
Položi li se na k tangenta t_1, koja os okretanja SJ siječe u točki K, pa se okretanjem opet izvede kugla, opisat će t_1 uspravni stožac, kojemu je K vrh, i koji kuglu dotiče u onom usporedniku, što ga opisuje diralište tangente t_1 na k. Taj je stožac kugli o p i s a n.

Budući da svaka najveća kružnica kugle može postati ekvatorom, vidi se, da će svaki uspravni valjak, koji je kugli opisan, doticati kuglu u najvećoj kružnici. Svaka kružnica c kugline površine, koja nije „najveća kružnica“, može biti usporednik; treba samo zamisliti, da se ravnina kružnice c može postaviti horizontalno. Prema tomu se može po svakoj kružnici c kugline površine položiti dodirni stožac, kojemu će vrh biti na dijametru kugle, normalnom na ravnini kružnice c.

Svakom točkom R kugline površine prolazi jedan usporednik i jedan meridijan. Ako je zadana projekcija R' točke R, koja je na kuglinoj površini (sl. 215.), položit će se u prvoj i drugoj projekciji onaj usporednik, koji ide točkom R. Prva je njegova projekcija kružnica, koja će sadržavati točku R'; druga je projekcija usporednika horizontalan pružac, koji ima istu dužinu kao i dijametar prve projekcije toga usporednika. Točka će se

R'' odrediti ordinalom. Ako je najprije zadana projekcija R'', naći će se R' upravo obrnutim postupkom. Za izabranu točku R'' dobivamo dvije prve projekcije R' i T' točaka na prednjoj i na drugoj polovini kugle.

118. Kosa projekcija kugle. Glavni meridijan g kugle postavljen je u ravninu slike xz (slika 217. a); kuglu, od koje je prednja polovina pred xz, a stražnja polovina iza xz, treba predočiti u kosoj projekciji, kod koje je uzeta prikrata $\frac{1}{2}$. Povući ćemo horizontalni dijametar AB meridijana g i kroz središte O povući paralelu sa smjerom osi $\overline{y}$. Učinimo li na toj paraleli $O\overline{C} = O\overline{D} = \frac{1}{2} \cdot OA$, bit će AB i $\overline{C}\overline{D}$ dva konjugirana dijametra za kosu projekciju ekvatora e. Uzmemo li drugu koju tetivu meridijana g, na pr. GH, koja je paralelna s AB, pa istim načinom odredimo pripadni konjugirani dijametar $\overline{K}\overline{L}$, dobit ćemo elipsu, koja je kosa projekcija usporednika na kugli. Kontura kugle u kosoj projekciji doticat će sve te eliptičke



Sl. 217.

slike usporednikâ. Kontura ne će biti kružnica g, jer elipse AB, $\overline{C}\overline{D}$; GH, $\overline{K}\overline{L}$, ... prelaze preko kružnice g na obje strane. Ta će kontura biti elipsa, jer valjak, koji je kugli opisan, a izvodnice su mu paralelne s kosim zrakama projiciranja, siječe ravninu xz u elipsi. Osi te elipse mogu se ovako odrediti.

Povucimo središtem O kugle u ravnini xz pravac $h \parallel \overline{y}$; na tome će pravcu biti obje točke $\overline{C}$ i $\overline{D}$. Pravcem h položena ravnina σ normalno na xz siječe kuglu u najvećoj kružnici k. Točka C kugline površine, koja je pred ravninom xz i od te ravnine udaljena za polumjer r, bit će na kružnici k. Kosa je projekcija točke C već prije određena točka $\overline{C}$. Sve kose zrake projiciranja, koje dotiču kuglu, čine valjak. Jedna će izvodnica toga

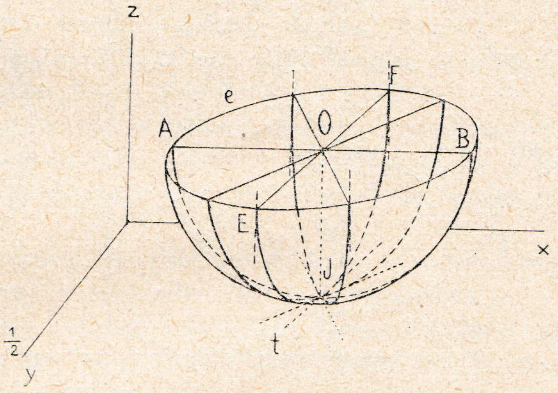
valjka biti tangenta na kružnicu k u točki R, koja je na prednjem dijelu kugle. Da se nađe točka R i njezina kosa projekcija, preložit ćemo kružnicu k oko pravca h u (k) u ravninu slike (gl. posebnu sl. 217. b). Na istoj slici 217. *a* bilo bi $(k) = g$.

Preložena zraka projiciranja bit će $C\bar{C}$, ona je prema xz priklonjena pod kutom φ; povuče li se tangenta na preložaj (k) paralelno s $C\bar{C}$, dobit će se diralište R i na h točka $\bar{R}$. Iz pravokutnog trokuta $OR\bar{R}$ izlazi

$$O\bar{R} = \frac{r}{\sin\varphi}, \text{ a iz } \Delta\, CO\bar{C} \text{ slijedi } C\bar{C} = \frac{r}{\sin\varphi}.$$

Prema tome je $O\bar{R} = C\bar{C}$ velika poluos za eliptičku konturu u kosoj projekciji kugle.

Dodirni valjak, koji čine kose zrake, doticat će meridijan g kugle u točkama M i N (sl. 217. a), pa će eliptička kontura imati u M i N iste tangente kao i glavni meridijan g. Budući da je (sl. 217. a i b) $M\bar{C} = C\bar{C}$, bit će $M\bar{C} = O\bar{R}$, t. j. točka je $\bar{C}$ fokus za eliptičku konturu. Iz simetričnih odnosa izlazi, da je točka D drugi fokus te konture.



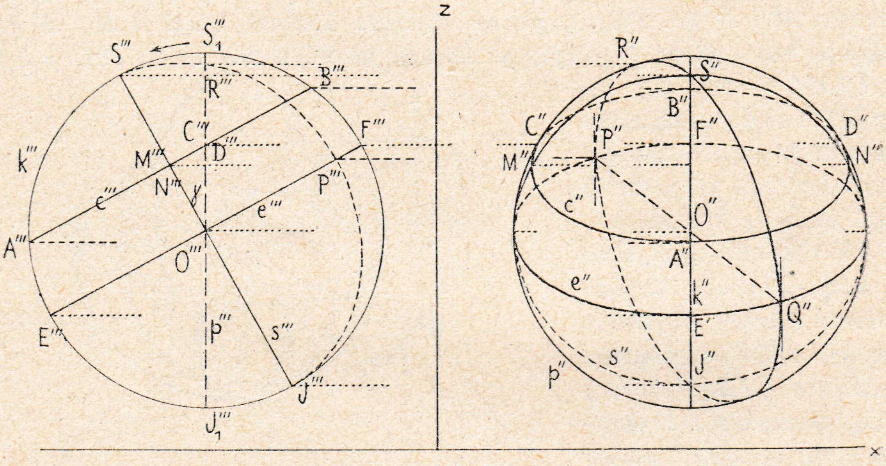
Sl. 218.

U slici 218. prikazana je donja polovina kugline površine u kosoj projekciji; donja je polovina glavnoga meridijana AJB. Povuče li se koji dijametar EF ekvatora e, pa se njim i polom J položi ravnina, sjeći će ona površinu u polovini meridijana EJF, koji se prikazuje koso kao polovina elipse. Smjerovi su EF i OJ za tu elipsu konjugirani. Zato će pomenuta elipsa imati u J tangentu t, koja je paralelna s EF. Istim će se načinom naći kose projekcije drugih meridijana.

119. Projekcije kugle, koja je zaokrenuta oko pravca u nov položaj. U slici 219. prikazana je prije svega treća projekcija kugle, kojoj je središte O, a polovi su joj S_1 i J_1. Kugla je zaokrenuta oko pravca, koji ide središtem O normalno na Π_3, za kut γ u onome smislu, kako je naznačeno strjelicom. U novom će položaju biti projekcije polova S''' i J''', ekvatora e''', usporednika $A'''\,B'''$ i t. d. Iz treće je projekcije izvedena druga projekcija kugle. Kružna kontura p'' u Π_2 bit će projekcija onoga najvećega

kruga, kojemu je treća projekcija pravac $p''' \equiv S'''_1 J'''_1$. Polovi S'' i J'' ne će biti na konturi p'' nego u nutarnjosti te konture na vertikalnom dijametru k'', koji je druga projekcija konture k''' u Π_3. Polovi S'' i J'' dobivaju se ordinalama (za os z) iz S''' i J'''. Pol je S sprijeda, pa će u Π_2 biti vidljiv; pol je J u Π_2 nevidljiv.

Ekvator e prikazat će se u Π_2 kao elipsa, kojoj se mala os $E''F''$ dobiva ordinalama iz E''' i F'''. Isto tako daje usporednik $A'''B'''$ u drugoj projekciji elipsu, kojoj je mala os $A''B''$ dobivena ordinalama. Točke $C''' \equiv D'''$, u kojima usporednik $A'''B'''$ siječe p''', prikazuju se u Π_2 u rastavljenim točkama C'', D'' na konturi p''. U točkama C'' i D'' dotiče eliptička projekcija usporednika konturu p''.



Sl. 219.

Meridijan $S'''P'''J'''$ siječe ekvator e''' u točki P'''; projekcija će se P'' dobiti ordinalom na e''. Druga točka Q, u kojoj isti taj meridijan siječe ekvator, ima drugu projekciju Q'', pa će pravac $P''Q''$ ići središtem O''. Obadva će dijametra $S''J''$ i $P''Q''$ biti konjugirana za drugu projekciju toga meridijana. Meridijan s, koji se u Π_3 prikazuje kao pravac $s''' \equiv S'''J'''$, ima eliptičku drugu projekciju s'', za koju će jedna os biti $S''J''$, a druga je os horizontalni premjer konture p''. Obje točke M'' i N'', u kojima s'' siječe usporednik c'', dobivaju se ordinalama iz sjecišta $M'''N'''$ usporednika c''' i meridijana s''' u Π_3.

Bilješka. Projekcija zaokrenute kugle upotrebljava se često u zadaćama sferne astronomije. Mjesto točaka S_1 i J_1 dolaze tu točke Z i N, zenit i nadir; okomito na ZN

prolazi središtem svemirske kugle (t. j. na zemlji, koja se uzima kao točka), horizont nekoga mjesta. Svemirska je os nagnuta prema horizontu, krajne su joj točke svemirski polovi S i J; okomito na njoj stoji ekvator e svemira i t. d.

Zadaci za vježbu.

384.) Nacrtaj kosu projekciju polukugle, kojoj je kružna granica u ravnini xz; $\alpha = 30^0$, $pr.\ \frac{1}{1}$. Zašto će kontura biti sastavljena od polovine kružnice i polovine elipse?

385.) Okreni kuglu, središte S (3, 4, 5), $r = 3$, oko pravca $q \perp \Pi_2$, koji je u Π_1 udaljen za $d = 7$ od početne točke, i to za kut $\phi = 90^0$, pa nacrtaj obje projekcije za novi položaj.

386.) Nacrtaj projekciju kugle u zadatku 385. sa strane na ravninu $\sigma \perp \Pi_1$.

387.) Nacrtaj kosu projekciju kuglina pojasa, koji je omeđen s dva jednaka usporednika, ako je njihova daljina od središta $d = 1$. Polumjer kugle $r = 4$.

388.) Predoči kuglu u ortogonalnim projekcijama i naznači na gornjoj polovini točku M, koja ima geografsku dužinu $\delta = 120^0$ i geogr. širinu $\varphi = 30^0$. Glavni meridijan ujedno je početni meridijan za geogr. dužinu.

389) Odredi na prednjoj polovini kugle neku točku R tako, da tetiva SR (S je gornji pol) ima pravu dužinu $d = 3$. Polumjer kugle $r = 2{\cdot}5$.

390) Odredi projekcije kugle, koja je upisana zadanom nepravilnom tetraedru, ako je jedna pobočka tetraedra u Π_1. Raspolovi plošne kutove, što ih čine tri pobočke tetraedra s ravninom osnovke; te će se tri raspolovne ravnine sjeći u središtu upisane kugle.

391.) Prikaži u kosoj projekciji ($\alpha = 45^0$, $pr.\ \frac{1}{3}$) kuglu s kojimgod usporednikom, pa odredi i stožac, koji je kugli opisan duž toga usporednika.

392.) Odredi u ortogonalnoj projekciji kojigod koso položen meridijan kugle i konstruiraj osnovku u Π_2 za onaj valjak, koji je kugli opisan duž izabranoga meridijana.

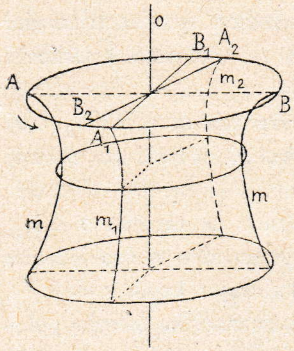
393.) Zadan je pravac M (—1, 4, 3) N (4, 2, 5). Nacrtaj projekcije kugle, koja će doticati ravnine Π_1 i Π_2, a središte će joj biti na MN.

394.) Središte je kugle točka M (3, 0, 0) na osi x, $r = 4$; odredi na stražnjoj polovini te kugle točku, koja ima od osi x daljinu $d = 2$. Upotrebi pobočnu projekciju Π_3.

120. Izvođenje i razdioba rotacionih površina. Okreće li se neka crta (ravna krivulja ili pravac) oko čvrstoga pravca o, koji je u ravnini izabrane krivulje, opisat će ona rotacionu površinu. Početna se krivulja uzima tako, da je paralelna s Π_2, a pravac $o \perp \Pi_1$; krivulja se u pomenutom položaju zove glavni meridijan rotacione površine, a pravac o os te površine. Svi ostali položaji, koje zauzima početni meridijan za vrijeme okretanja, zovu se meridijani rotacione površine. Neki će se meridijan dobiti, ako se rotaciona površina presiječe ravninom, koja prolazi osju o (slika 220.).

Svi su meridijani iste rotacione površine sukladne krivulje. Svaka točka glavnoga meridijana opisuje kružnicu, koja se zove usporednik površine. Isp. rotacionu površinu u ortogonalnoj projekciji u sl. 228.

Prema tumačenju u § **117.** i kugla je rotaciona površina.



Slika 220.

Ako je crta, koja se okreće oko osi o, pravac p, imat ćemo ove tri vrste rotacionih površina:

a) pravac je p paralelan s o, površina je rotacioni valjak;

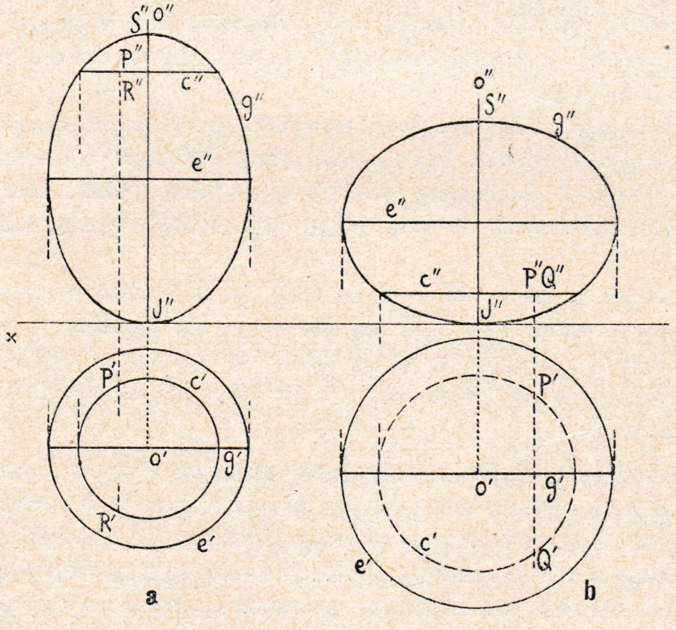
b) pravac p siječe os o, površina je rotacioni stožac; ako je napose

c) pravac p mimosmjeran prema osi o, površina je rotacioni hiperboloid s jednim plaštem (isp. § **121.**, sl. 224., gdje se pokazuje, da je glavni meridijan te površine hiperbola).

Okreće li se neka krivulja 2. reda oko osi rotacije o, koja je ujedno os simetrije za krivulju, dobit će se

1.) produženi elipsoid, ako se elipsa okreće oko velike osi;

2.) splošteni elipsoid ili sferoid, ako se elipsa okreće oko male osi;



Sl. 221.

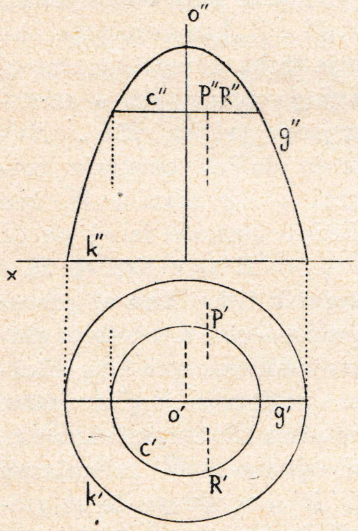
3.) paraboloid, ako se parabola okreće oko svoje osi;

4.) dvoplošni hiperboloid, ako se hiperbola okreće oko realne osi;

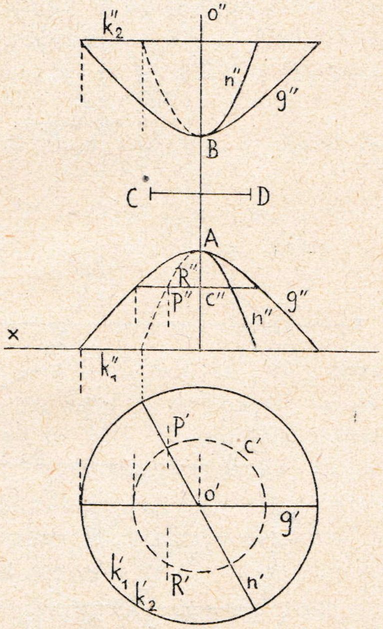
5.) jednoplošni hiperboloid, ako se hiperbola okreće oko imaginarne osi. Taj je hiperboloid onaj isti, koji se dobiva okretanjem pravca oko *o*, u slučaju, koji je sprijeda spomenut pod *c).*

Sve su te površine drugoga reda, jer ih neki pravac može sjeći najviše u dvije točke.

Okreće li se krivulja 2. reda oko pravca *o*, koji nije ujedno os simetrije za tu krivulju, nastat će neke površine višega reda. Ako se na pr. kružnica okreće oko pravca *o*, koji je ne siječe, nastat će prstenasta površina, nazvana torus. Čudnovata će rotaciona površina postati okretanjem istostrane hiperbole oko jedne njezine asimptote i t. d.



Sl. 222.



Sl. 223.

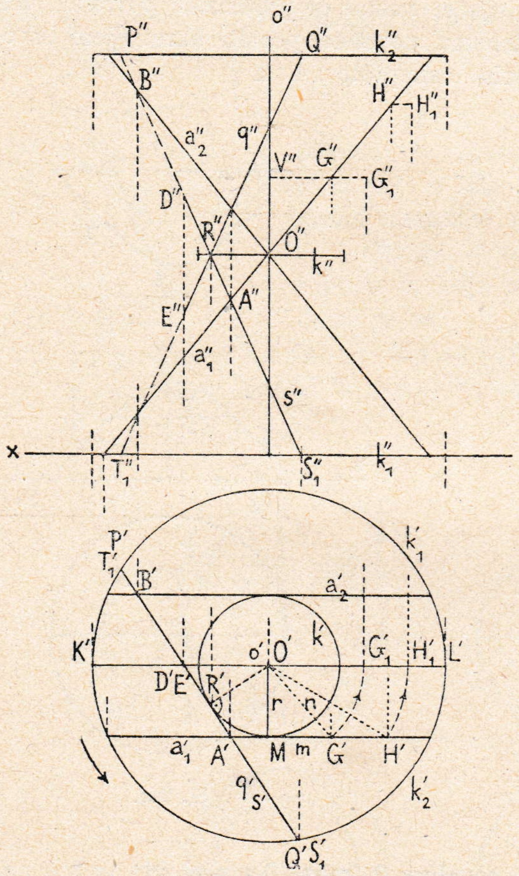
121. Predočivanje rotacionih površina 2. reda. Na slici 221. *a* i *b* prikazane su normalne projekcije produženoga i sploštenoga elipsoida. Najveći usporednik elipsoida zove se ekvator. Točke S i J, u kojima os okretanja o siječe površinu, zovu se polovi. Neka točka $P'' \equiv R''$ na produženom elipsoidu zajednička je druga projekcija za dvije točke P i R površine. Prve su projekcije tih točaka na pripadnom usporedniku c' u Π_1. Isto su tako prikazane na sploštenom elipsoidu točke P i Q, koje imaju istu drugu projekciju. Postupak je dakle posve isti kao kod kugle.

U slici 222. prikazan je rotacioni paraboloid. Na toj površini nema ekvatora, jer se glavni meridijan g'' može zamisliti produžen i ispod osi x tako, da će usporednici postajati sve veći. Na paraboloidu su predočene točke P i R, koje imaju istu drugu projekciju.

U slici 223. predočen je u normalnim projekcijama dvoplošni hiperboloid. Površina je sastavljena od dva jednaka plašta, koji su simetrično položeni prema ravnini, okomitoj na os o u središtu hiperboličkog meridijana g. U slici su prikazane projekcije dviju točaka P i R površine. Osim toga je osju o i točkom P položena ravnina, koja površinu siječe u meridijanu n. Dvoplošni hiperboloid nema ekvatora.

Neka bude zadan pravac $o', o'' \perp \Pi_1$ kao os rotacije, oko koje treba okrenuti pravac q, koji je prema osi o mimosmjeran (slika 224.). Najkraća daljina obadvaju pravaca o i q izlazi u Π_1 kao dužina normale iz o' na q', t. j. $O'R' = r$ (isp. § **51.** i zadatak 179.). Kad se pravac q okreće oko o, bit će ta najkraća daljina neprestano jednaka; projekcija će q' u svakom položaju biti tangenta kružnice k', opisane iz O' polumjerom $O'R' = r$. Druga će se projekcija kružnice k dobiti ordinalom za R', pa će biti $k'' \parallel x$.

Ako je T'_1 probodište pravca q s Π_1, opisat će ono za okretanja kružnicu k'_1 u Π_1. Simetrično s kružnicom k_1 prema ravnini kružnice k opisat će gornju kružnicu k_2 ona točka Q pravca q, za koju je $T'_1 R' = R' Q'$. Time je ujedno određena projekcija k''_2.



Sl. 224.

Može se uzeti, da je q' ujedno prva projekcija drugoga pravca s, za koji je probodište s Π_1 točka S_1 na k_1, a P točka njegova na gornjoj kružnici k_2. Obje projekcije R' i R'' ostaju i za taj pravac s iste kao za q.

Okrećemo li pravac q oko o u smislu, koji je u slici označen strjelicom, doći će on u položaj $a'_1 \parallel x$; druga će njegova projekcija ići točkom O''. Poslije daljega okretanja doći će pravac po drugiput u položaj, gdje je $a'_2 \parallel x$. I opet će druga projekcija a''_2 ići točkom O''.

Sve druge projekcije pravaca q, s, a_1, a_2, ... umatat će konturu glavnoga meridijana za rotacionu površinu, koja postaje. Prva će projekcija te konture biti u onom dijametru $K'L'$ kruga k'_1, koji je paralelan s Π_2.

Uzmimo na a'_1 točku G', kojoj je druga projekcija G'' na a''_1. Kod daljega okretanja pravca a_1 doći će G u ravninu glavnoga meridijana, i to u točku G_1, za koju je 1. projekcija G'_1; druga će projekcija G''_1 biti na konturi glavnoga meridijana u Π_2, i to u jednu ruku na ordinali točke G'_1, a u drugu ruku na pravcu $G''G''_1 \parallel x$, jer točka G opisuje za okretanja kružnicu, koja se u Π_2 projicira u pravac, paralelan s osi x. Posve isto vrijedi i za drugu neku točku pravca a_1. t. j. za H i za točku H_1 u glavnom meridijanu, u koju je okrenuta točka H.

Postavit ćemo u slici $O'G' = n$, $MG' = m$, $O'M = r$. Kako je $O'G' = O'G'_1 = n$, bit će

$$G''_1 G'' = G''_1 V'' - G''V'' = G'_1 O' - G'M = n - m.$$

Iz trokuta $O'MG'$ izlazi $r^2 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$, dakle

$$n - m = \frac{r^2}{n + m}.$$

Budući da je r konstantna veličina, bit će $n - m$, t. j. $G''_1 G''$, stim manje, što je veće $(n + m)$. Za točku H', za koju je daljina m' od M veća negoli m, a ujedno i $n' = H'O' > n$, bit će $H''_1 H''$ manja dužina od $G''_1 G''$. Što se dakle više udaljuje H''_1 na meridijanu u vis, to će pružac $H''_1 H''$ biti manji. Glavni je meridijan krivulja, koja se sve više približava pravcu a''_1 u Π_2. Isto se može pokazati za donji dio pravca a''_2. To svojstvo sjeća na hiperbolu, za koju su pravci a''_1 i a''_2 asimptote.

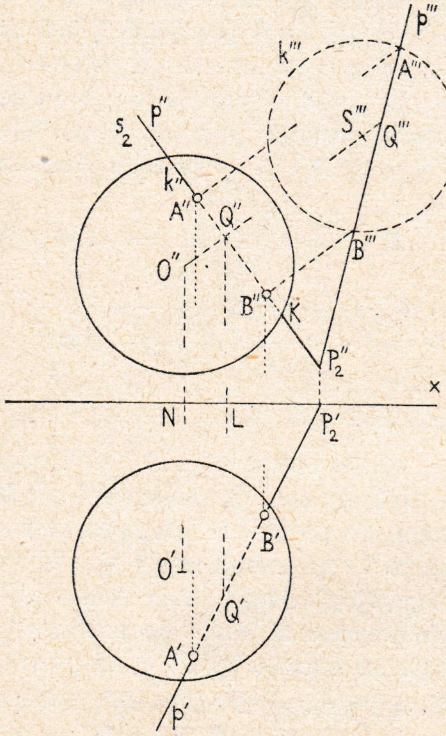
Pravac s' siječe a'_1 u A', a'_2 u B', a dijametar $K'L'$ u D'; vidi se, da je $A'D' = D'B'$. Potražimo li druge projekcije A'', B'' i D'' na s'', morat će biti opet $A''D'' = D''B''$. Točka D'' na glavnom meridijanu bit će dakle sredina prušca $A''B''$, kojemu su krajevi na asimptotama a_1 i a_2. To je pak poznato svojstvo hiperbole.

Pravac, koji se okreće oko osi o, opisuje jednoplošni hiperboloid upravo tako, kao da se hiperbola g'' okrenula oko svoje imaginarne osi. Realna poluos te hiperbole opisuje najuži krug k (usporednik) na hiperboloidu.

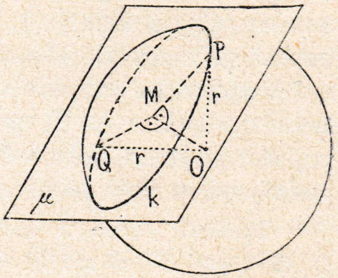
Bilješka. Da je meridijan g'' zaista hiperbola, pokazat će se još točnije u § 137. Okreće li se pravac q oko o, postaje isti hiperboloid, kao kad se okreće pravac s oko o. Na hiperboloidu ima dakle dva sistema izvodnica (pravaca).

II. Ravni prerezi i prodori kugle i rotacionih površina.

122. Prerez kugle ravninom. Kakvagod ravnina μ može sjeći kuglu samo u kružnici (slika 225.). Spusti li se iz središta O kugle normala na μ, koja ima nožište M, pa spoji li se kojagod zajednička točka P ravnine μ i kugle sa središtem O, nastat će pravokutan trokut OMP, kojemu je jedna kateta daljina OM, a hipotenuza je polumjer r kugle. Učini li se to isto za drugu koju točku Q presjeka, dobit će se opet pravokutan trokut OMQ,



Sl. 226.



Sl. 225.

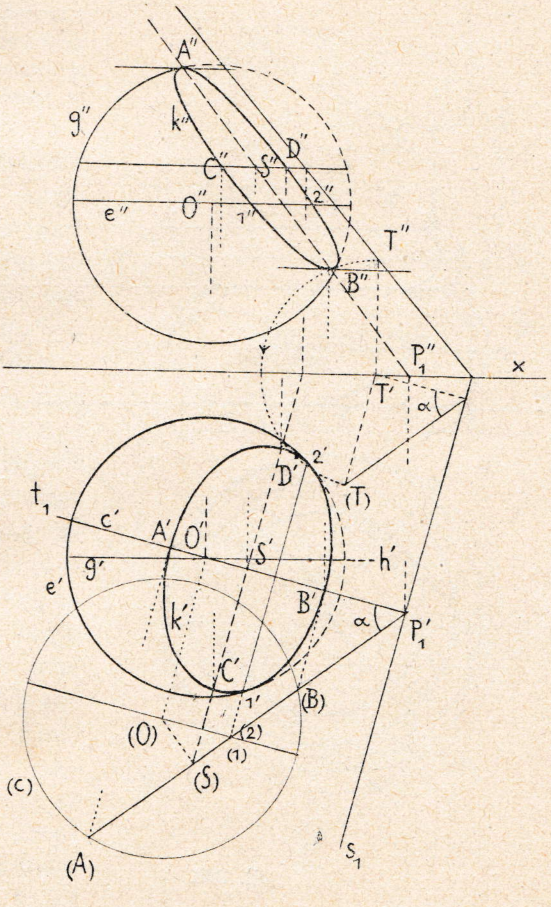
i t. d. Svi će ti trokuti OMP, OMQ, . . ., biti sukladni. Njihove su dakle druge katete MP, MQ, . . . jednake. Prema tomu opisuju točke P, Q, . . . kugle kružnicu k u ravnini μ; polumjer je te kružnice MP.

Ako ravnina μ prolazi središtem O, imat će presječna kružnica isti polumjer r kao i kugla; presjek je najveća kružnica kugle. Pod „sfernom daljinom" dviju točaka A i B na kuglinoj površini razumije se manji od obadvaju lukova, što ih određuju točke A i B na onom najvećem krugu, u kojem kuglu siječe ravnina ABO. Odrede li se za tri točke A, B i C takovi lukovi AB, BC i CA, nastaje sferni trokut.

Treba li u kojoj zadaći upotrebiti presjek kugle ravninom σ, koja je normalna na Π_1 ili Π_2, ne mora se taj presjek crtati u projekcijama, od kojih će jedna biti elipsa, nego se može upotrebiti treća projekcija na ravninu σ. U slici 226. određene su tim načinom obje točke A i B, u kojima pravac p probada kuglu, opisanu oko O s polumjerom r.

Kroz p je položena ravnina $\sigma \perp \Pi_2$; drugi joj dakle trag s_2 pada zajedno s p''. Ravnina će σ sjeći kuglu u kružnici k, a sjecišne će točke (p, k) biti tražena probodišta A i B (ispor. § **12.**, sl. 36.; i u sl. 226. može se treća projekcija držati preložajem oko $s_2 \equiv p''$). Projekcija p''' pravca p određena je probodištem P''_2 na Π_2 i točkom Q''', gdje je $Q'' Q''' = L Q'$. Ravnina σ siječe kuglu u kružnici k, za koju je prava veličina polumjera $Q'' K$, a središte joj je S od Π_2 udaljeno jednako kao i središte O kugle, t. j. $Q'' S''' = N O'$. Iz sjecištâ A''' i B''' kružnice k''' s pravcem p''' dobivaju se ordinalama projekcije A'', B'' i A', B'. Točka je A vidljiva u prvoj i u drugoj projekciji, a točka B u obje projekcije nevidljiva.

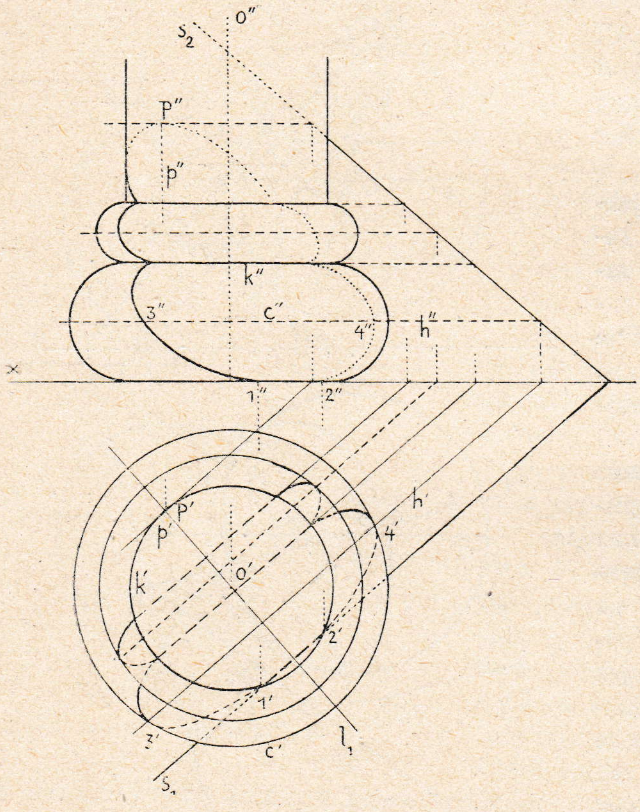
123. Određenje projekcijâ za presjek kugle ravninom, koja ima općen položaj. Općeno položena ravnina σ siječe kuglu (središte O) u kružnici k, za koju su u slici 227. određene obje projekcije.



Sl. 227.

S pomoću točke T traga s_2 određen je najprije prikloni kut α ravnine σ prema Π_1. Ravnina τ, položena središtem kugle normalno na trag s_1, bit će ravnina simetrije za traženi presjek k; ona siječe kuglu u najvećem krugu c, koji je oko traga t_1 preložen u Π_1 u (c). Priklonica ravnine σ, u kojoj tu ravninu siječe ravnina τ, okrenuta je poznatim načinom oko t_1 u Π_1 u položaj P'_1 (A). Ta preložena priklonica siječe (c) u točkama (A) i (B), koje su krajne točke jedne osi presjeka k u preložaju; normale iz (A) i (B) na t_1 daju u nožištima A' i B' prve projekcije krajnih točaka jedne osi za eliptičku projekciju k'. Središte

će za tu projekciju biti S', kojim ide druga os $C'D' \perp A'B'$. Budući da os CD stoji normalno na ravnini τ te je siječe u S, bit će u preložaju (S) nožište okomice, spuštene iz (O) na $P'_1(A)$. Polumjer se presjeka k vidi u preložaju u pravoj veličini $(S)(A)$. Učinit će se dakle $S'C' = S'D' = (S)(A)$, pa je time određena druga os za projekciju k'. Odredi li se s pomoću sutražnice za točku S' druga projekcija S'', a na osi x projekcija P''_1, bit će $P''_1 S''$ smjer jednoga dijametra elipse k'', za koji su A'' i B'' krajne točke. Drugi je konjugirani dijametar $C''D'' \parallel x$, a krajne se njegove točke dobivaju ordinalama iz C' i D'.



Sl. 228.

Projekcija k' dotiče ekvator c' u točkama $1'$ i $2'$. Tetiva $1\,2$ siječe ravninu τ u točki, za koju je preložaj $(1) \equiv (2)$ sjecište priklonice $(A)P'_1$ i paralele, povučene kroz (O) s t_1. U tu se paralelu projicira ekvator e na ravninu τ. Točke, u kojima projekcija k'' dotiče glavni meridijan kugle, izlaze s pomoću druge projekcije sutražnice $h' \equiv g'$. Presjek drugih rotacionih površina 2. reda ravninom, na pr. elipsoida, odredit će se posve istim načinom.

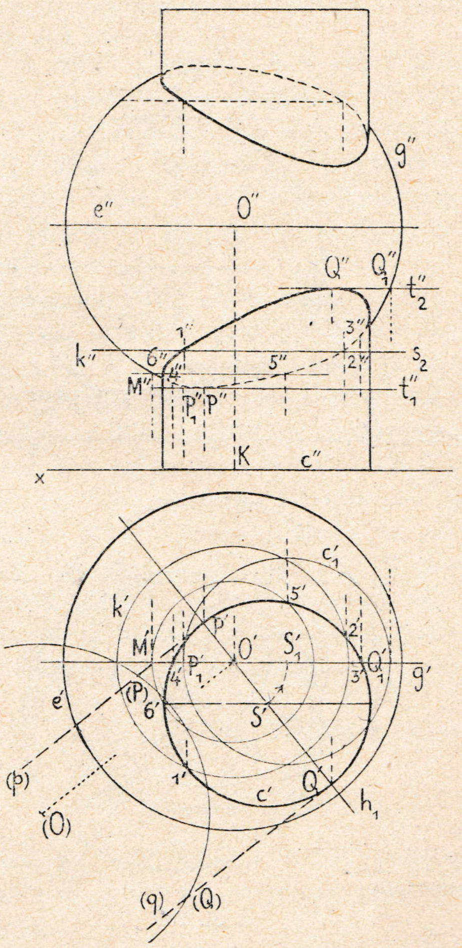
124. Presjek rotacione površine ravninom. U slici 228. prikazane su obje projekcije podnožja nekoga stupa. Taj je stup rotaciona površina, sastavljena od valjka i od dva nejednaka torusa (isp. § **120.** na kraju). Površina je presječena ravninom σ. Najveći je usporednik prikazane površine krug c; njegova ravnina siječe σ u sutražnici h, za koju će se odrediti projekcija h'. Projekcije c' i h' sijeku se u točkama $3'$ i $4'$; projekcije su $3''$ i $4''$ na c''. Točke 3 i 4

pripadaju presjeku površine s ravninom σ. Istim se načinom mogu odrediti po dvije točke presjeka na kojemgod usporedniku. Najviša će točka presjeka biti ona točka P, u kojoj ravninu σ siječe izvodnicu p valjka; ta je izvodnica u ravnini λ, položenoj osju o normalno na σ. Trag l_1 ujedno je os simetrije za prvu projekciju presjeka. Presječna krivulja izlazi iz točaka 1 i 2 na s_1. Prikazanim se načinom može odrediti presječna krivulja kojegod rotacione površine ravninom, napose i kugle, pa rotacionoga valjka i stošca.

Bilješka. U slici 228. uzeto je, da su obadva torusa (od kamena) iznutra potpuno ispunjena, t. j. da nema prstenaste šupljine u njihovim sredinama. Obadva se dakle torusa dotiču u svim točkama kruga, kojemu je obodnica k. Isto se takov dodir zamišlja za gornji torus i za valjak.

125. Prodori kugle s uspravnim valjkom i stošcem. *1.* Prodor kugle s uspravnim valjkom odredit će se tako, da se na os valjka polože normalno ravnine, a onda u svakoj ravnini odredi usporednik za jednu i drugu ovu površinu. Oba će se usporednika u istoj ravnini sjeći u dvije točke, koje pripadaju prodornoj krivulji. U slici 229. bit će prodorna crta sastavljena od dvije posebne zatvorene krivulje, koje su simetrično položene prema ravnini ekvatora e za kuglu. Prva će projekcija tih krivulja biti u osnovci c' valjka.

Neka ravnina $\sigma \parallel \Pi_1$ siječe kuglu u kružnici k, kojoj će se prva projekcija k' (središte u O') odrediti poznatim načinom; ta ravnina σ siječe valjak u kružnici, kojoj je prva projekcija osnovka c valjka. Kružnice se k' i c' sijeku u točkama $1'$ i $2'$; druge su projekcije $1''$ i $2''$ na nacrtnom tragu s_2 ravnine σ. Budući da je na kugli još jedan usporednik, koji ima

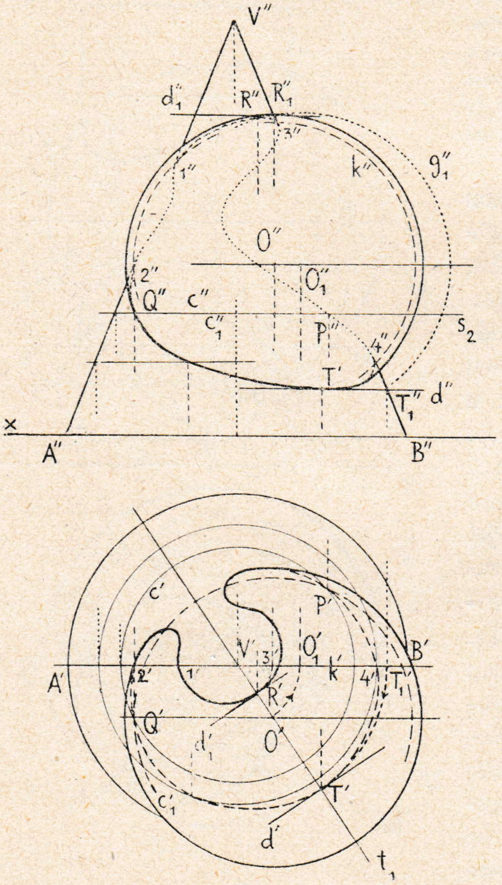


Sl. 229.

isti polumjer kao i k (a položen je s k simetrično prema e), dobit će se ordinalama kroz $1'$ i $2'$ još dvije točke presjeka za gornju granu njegovu. Ta se gornja grana u drugoj projekciji može uostalom crtati i samo s obzirom na pomenutu simetriju presjeka prema ravnini ekvatora, dakle prema pravcu e''.

Glavni meridijan g kugle siječe valjak u četiri točke, koje se projiciraju na Π_1 u zajedničke točke $3'$ i $4'$ osnovke c' i meridijana g'. Dvije od tih točaka pripadaju donjoj grani presjeka; u njima dotiče 2. projekciju presječne krivulje glavni meridijan g''.

Presječna će krivulja u 2. projekciji doticati i krajne izvodnice valjka, n. pr. lijevu krajnu izvodnicu u točki $6''$. Da se ta točka odredi, povući će se središtem S' osnovke c' valjka dijametar $S'6' \parallel x$, i iz O' opisati kružnica kugle, kojoj je polumjer $O'6'$; druga će projekcija toga usporednika biti horizontalan pravac točkom M''. Pomenuti usporednik siječe c' u točkama $6'$ i $5'$, pa će druga projekcija $6'$ biti zaista na lijevoj krajnoj izvodnici valjka. Osim toga se na tome putu dobila još i točka 5 za presječnu krivulju. Dodirna točka presjeka na desnoj krajnoj izvodnici valjka za 2. projekciju dobit će se posve istim načinom.



Sl. 230.

Svaka će grana prodorne krivulje imati po jednu najvišu i najnižu točku (isp. završetak § **94.**). U takvim će točkama biti tangente presječne krivulje h o r i z o n t a l n e. Neka bude za donju granu najviša točka obilježena s Q, a najniža s P. Te će točke biti u ravnini χ, koja je položena osju valjka i središtem O kugle, i koja je prema tome ravnina simetrije za presječnu krivulju. Ravnina χ siječe kuglu u meridijanu, a valjak u dvije izvodnice p i q; te tri crte možemo preložiti oko traga h_1 u Π_1; bit će $(O)\,O' = O''\,K$. Obje točke, u kojima (za donju granu) preložaji (p) i (q) sijeku preloženi meridijan, jesu preložaji (P) i (Q) traženih točaka. Njihove su prve projekcije P' i Q' na h_1 i ujedno na c', a druge projekcije P'' i Q'' imaju nad osi x udaljenosti, koje su jednake visinama $(P)\,P'$ i $(Q)\,Q'$.

Mjesto da se obavi preložaj oko h_1, može se osnovka c' valjka okrenuti oko O' u c'_1, dok S' dođe u S'_1 na g'. Točke će P' i Q' doći poslije okreta u P' i Q'_1 na g'. Druge će projekcije P''_1 i Q''_1 biti na glavnom meridijanu g'', a tangente t''_1 i t''_2 prolazit će kroz P''_1 i Q''_1 paralelno s osi x. Dirališta se P'' i Q'' dobivaju ordinalama iz P' i Q'.

Bilješka. Istumačen postupak ne bi bio zgodan, kad bismo primjer predočili u kosoj projekciji, jer bi onda trebalo crtati usporednike kao elipse. Mjesto ravninâ, koje su paralelne s π_1, položili bismo ravnine paralelne s ravninom crtnje xz. Svaka bi takva ravnina sjekla kuglu u kružnici, koja se i u kosoj projekciji prikazuje kao kružnica, a valjak u dvije izvodnice. Zajedničke točke tih crta pripadaju presjeku.

2. Gotovo istim načinom kao u sl. 229. određena je u slici 230. presječna crta kugle i uspravnoga stošca. Središte je kugle točka O; vrh je stošca u V, a osnovka mu je u Π_1. Neka ravnina σ, položena normalno na os stošca, siječe stožac u kružnici c, a kuglu u kružnici c_1. Prve su projekcije tih kružnica c' i c'_1. Njihove sjecišne točke P' i Q' pripadaju prvoj projekciji presječne krivulje; druge su projekcije P'' i Q'' na s_2. Istim će se načinom odrediti ostale točke presjeka.

Ravnina, položena osju stošca paralelno s Π_2, siječe stožac u izvodnicama AV i BV, a kuglu u kružnici, koja se vidi u pravoj veličini u Π_2. Zajedničke točke te kružnice i izvodnicâ AV i BV pripadaju presjeku; one su u slici obilježene s $1'$, $2''$, $3''$ i $4''$. U njima dotiče presječna krivulja pravce $A''V''$ i $B''V''$, prelazeći s prednjega dijela stošcâ na stražnji dio.

Zaokrene li se kugla oko osi stošca, dok joj središte dođe u O'_1, O''_1 u ravninu AVB, vidjet će se u Π_2 najniža točka presječne krivulje u T''_1, t. j. u sjecištu meridijana g''_1 i izvodnice $V''B''$ stošca; najviša se pak točka prikazuje u R''_1 na istoj izvodnici. Zaokrenu li se točke T_1 i R_1 zajedno s kuglom u pređašnji njezin položaj, dobit će se prve projekcije T' i R' najniže i najviše točke. Tangente su u ovim točkama horizontalne, dakle njihove druge projekcije d'' i d''_1 paralelne s osi x. Dirališta su tih tangenata u Π_2 druge projekcije T'' i R'' najniže i najviše točke.

Prva je projekcija presječne krivulje simetrična prema ravnini τ, položenoj kroz os stošca i središtem O kugle; zato će biti d' i $d'_1 \perp t_1$.

Zadaci za vježbu.

395.) Zadana je kugla, kojoj je središte O (2, 4, 4), $r = 2{\cdot}5$; presijeci kuglu ravninom $\rho \perp \Pi_2$, ako trag r_2 čini s osi x kut 45^0, a prolazi početnom točkom na x. Predoči prvu projekciju presjeka.

396.) Odredi na zadanom pravcu p točku, koja od točke P (izvan p) ima zadanu daljinu r. Koliko je rješenja moguće?

397.) Nacrtaj projekcije kugle, koja ide točkom M (3, 3, 4), a pol joj je J točka (1, 2, 0). Odredi polumjer OM, postavi u njegovoj sredini ravninu $\sigma \perp OM$ i predoči presjek kugle tom ravninom.

398.) Presijeci kuglu O (3, 3, 5), $r = 2$, nekom ravninom ρ tako, da polumjer presjeka bude $r_1 = 1·5$.

399.) Odredi projekcije elipse, u kojoj siječe sferoid ravnina, položena njegovim središtem pod kutom $\alpha = 60^0$ prema Π_1 (isp. § **123.**).

400.) Prikaži u projekcijama meridijan za rotacionu površinu u sl. 228. tako, da ravnina meridijana čini s Π_2 kut 45^0.

401.) Uzmi u ravnini μ (4, 3, 3·5) kružnicu k, kojoj je polumjer $r_1 = 2$, pa položi kuglu, koja će prolaziti kroz k, a polumjer joj je $r = 4$. Koliko ima rješenja?

402.) Zadan je kosi kružni stožac, kojemu je osnovka u Π_1. Na stošcu odredi kružni presjek u visini $v = 2$ nad Π_1, položi tim presjekom kuglu, koja će stožac još sjeći, i nađi ostali dio presjeka kugle sa stošcem. Taj će drugi dio presjeka biti opet kružnica. Isp. § **99.**

403.) Predoči projekcije nekoga pravokutnoga sfernog trokuta, kojemu je jedna kateta na ekvatoru luk $\delta = 60^0$.

404.) Na kugli O (—3, 4, 3), $r = 2·5$, zadane su dvije točke A (—1, 3·5, ?) i B (—4·5, 5, ?). Odredi pravu veličinu sferne daljine AB.

405.) Odredi presjek kugle s rotacionim valjkom, kojemu je os u ravnini ekvatora kugle, a jedna mu izvodnica ide središtem kugle.

406.) Odredi presjek kosoga kružnoga stošca (osnovka u Π_1) s kuglom, kojoj je središte u vrhu stošca.

407.) Zadan je rotacioni produženi elipsoid i kugla; odredi presječnu krivulju tih površina.

408.) Nađi 2. projekciju presječne krivulje za rotacioni paraboloid, kojemu je os normalna na Π_1, i za uspravni kružni valjak (osnovka u Π_1).

409.) Odredi projekcije presjeka dviju nejednakih kugala. Pokaži, da je presječna crta kružnica.

III. Dodirne ravnine i sjene kugle i rotacionih površina.

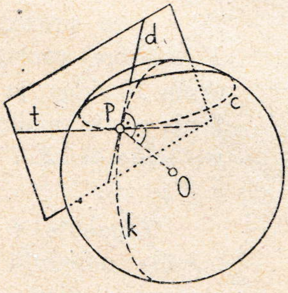
126. Dodirna ravnina kugle. Zamislimo u polu S kugle (isp. sl. 214.) položene tangente t na meridijane; budući da svaka takva tangenta stoji na dijametru SJ (ili polumjeru OS) okomito, bit će sve tangente t u istoj ravnini τ, koja je normalna na OS u točki S. Takva se ravnina zove dodirna (tangencijalna) ravnina kugle u S; točka je S njezino diralište. Ravnina τ nema s kuglom, osim točke S, nijednu drugu zajedničku točku. Tangente su t ujedno tangente kugle u S.

Budući da se svaka točka na kugli može učiniti polom (isp. § **117.**), izlazi, da će dodirna ravnina u kojojgod točki P kugline površine biti ona ravnina τ, koja u točki P stoji normalno na polumjeru OP.

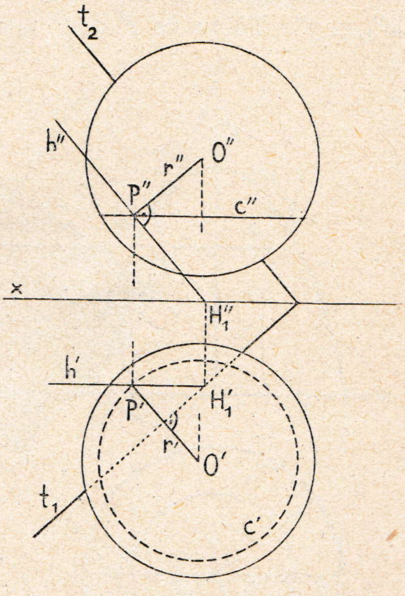
Položimo točkom P na kugli kojugod kružnicu c kugle; ravnina γ te kružnice sjeći će dodirnu ravninu τ kugle za točku P u pravcu p, koji će biti tangenta kugle u P, a ujedno tangenta kružnice c u P. Pravac p u ravnini γ ne može naime imati s kuglom, dakle ni s kružnicom c osim P nijednu drugu zajedničku točku, pa je zato tangenta kružnice c. Obrnuto će tangenta q neke kružnice k (koja je na kugli), u njezinoj točki Q, biti ujedno tangenta kugle, pa će se zato nalaziti u dodirnoj ravnini kugle za točku Q.

Polože li se dakle nekom točkom P kugle kakvegod dvije kružnice k i c kugline površine, pa se za k i c odrede obje tangente u P (slika 231.), t. j. pravci t i d, bit će ravnina τ, određena pravcima t i d, opet dodirna ravnina kugle u točki P.

Mjesto kakvihgod kružnica k i c kroz P mogu se položiti osobite dvije, i to meridijan i usporednik; njihove se tangente u P mogu lako odrediti, pa se tako dobiva dodirna ravnina kugle u P načinom, koji vrijedi uopće za rotacione površine.



Sl. 231.



Sl. 232.

Položi li se dakle nekom točkom Q kakvegod rotacione površine pripadni meridijan i usporednik, pa se za obe ove krivulje odrede tangente u Q, bit će ravnina tih tangenata dodirna ravnina površine u točki Q.

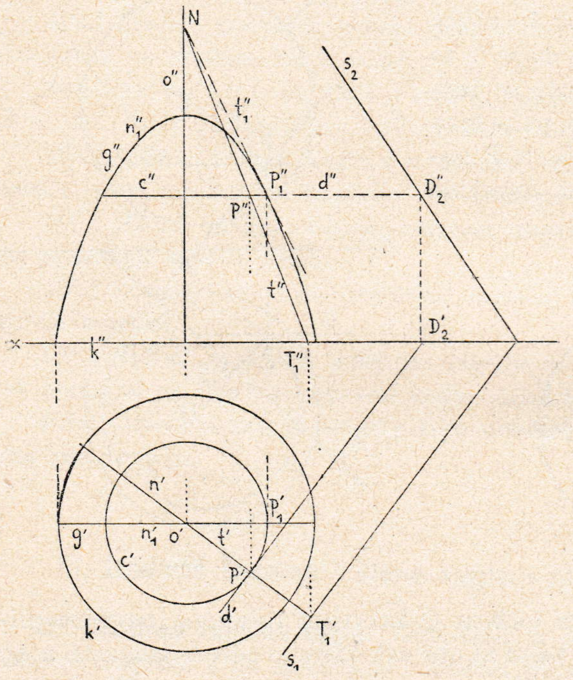
U slici 232. određeni su tragovi dodirne ravnine za kuglu u njezinoj točki P prvim od obadvaju istumačenih načina. S pomoću usporednika c određene su projekcije P', P'' jedne točke kugline površine, a zatim je u P na polumjer OP položena normalno ravnina τ (isp. § **49.**, sl. 131.).

127. Dodirna ravnina rotacionoga paraboloida. Drugi istumačeni način za određenje dodirne ravnine prikazan je u slici 233. Glavni je meridijan rotacione površine parabola g''. S pomoću usporednika c', c'' određena je

točka P', P'' paraboloida, u kojoj treba položiti dodirnu ravninu σ na površinu.

Tangenta u P na usporednik c bit će paralelna s Π_1; prva joj je projekcija d' normalna na $o'P'$, a druga je d'' horizontalan pravac kroz P''. Meridijan n za točku P prikazuje se u Π_1 kao dijametar osnovnoga kruga k', i to onaj, koji ide projekcijom P'. Da se odredi tangenta t u točki P na meridijan n, mogla bi se odrediti druga projekcija n'' meridijana, i onda na n'' u P'' položiti tangenta. Mjesto da crtamo krivulju n'', koja je parabola, možemo zamisliti, da se ona okrene oko osi o u ravninu glavnoga meridijana g zajedno s točkom P.

Obilježimo li meridijan n poslije zakreta s n_1, bit će $n'_1 \equiv g'$, a $n''_1 \equiv g''$. Točka će P doći poslije zakreta u P_1, gdje je P'_1 u g', a P''_1 na g''. Tangenta u P''_1 na n''_1 tražena je tangenta t''_1; ona siječe os rotacije o u točki N. Tangenta se t_1 ima napokon okrenuti natrag zajedno s meridijanom n_1 u prešnji njegov položaj tako, da tangenta dolazi u položaj t, gdje prolazi točkom P, a mora prolaziti i točkom N, koja je kod rotacije ostala netaknuta. Prema tome će biti $t'' \equiv PN''$, a t' je u n'.



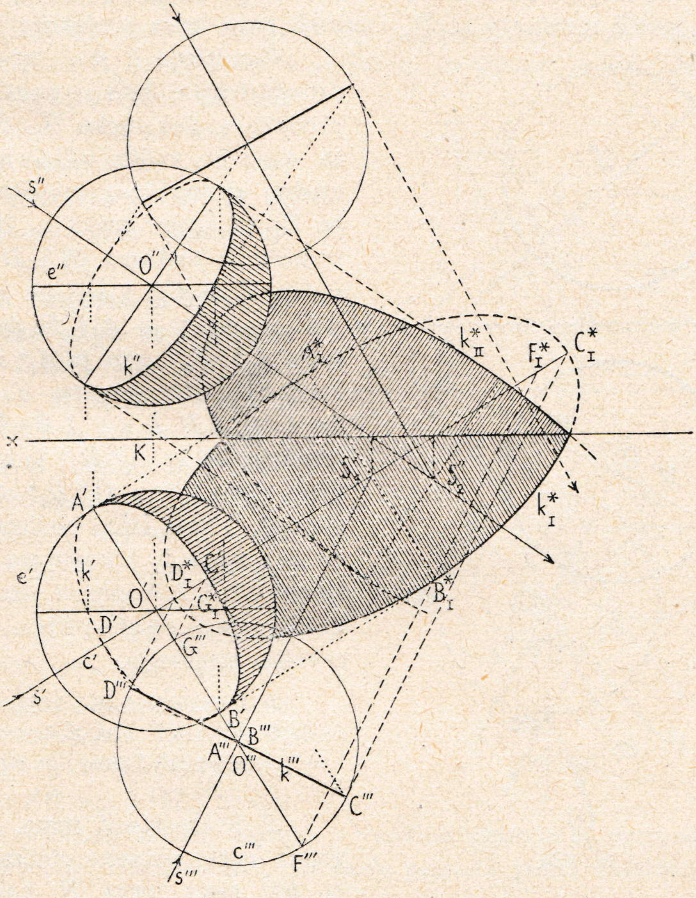
Sl. 233.

Tangente d i t paraboloida određuju dodirnu ravninu σ; njezin prvi trag s_1 ide tlocrtnim probodištem T'_1 tangente t paralelno s d', a drugi trag s_2 nacrtnim probodištem D''_2 tangente d.

128. Sjena kugle uz paralelnu rasvjetu. Najsjajnija točka. *1.* Za kuglu (slika 234.) sa središtem O', O'' treba odrediti samosjenu i bačenu sjenu na Π_1 i Π_2 uz paralelnu rasvjetu, ako je zadan smjer svjetlosti s', s''. Valjak, koji je kugli opisan, a izvodnice su mu paralelne sa smjerom s, doticat će kuglu u najvećoj kružnici k, kojoj je ravnina normalna na smjeru s (isp. § **117.** sl. 216.). Ta je kružnica granica između svijetle i osjenjene

strane kugle, dakle crta rastavnica za paralelnu rasvjetu. Rastavnica se može odrediti kao presjek kugle ravninom ρ, koja je položena središtem O kugle normalno na smjer s.

Jednostavniji je način za to određenje prikazan u sl. 234. Zrakom s, koja je položena središtem O kugle, prolazi ravnina prometalica σ za Π_1; njezin će trag na Π_1 biti u s'. Ravnina σ siječe kuglu u najvećoj kružnici c,

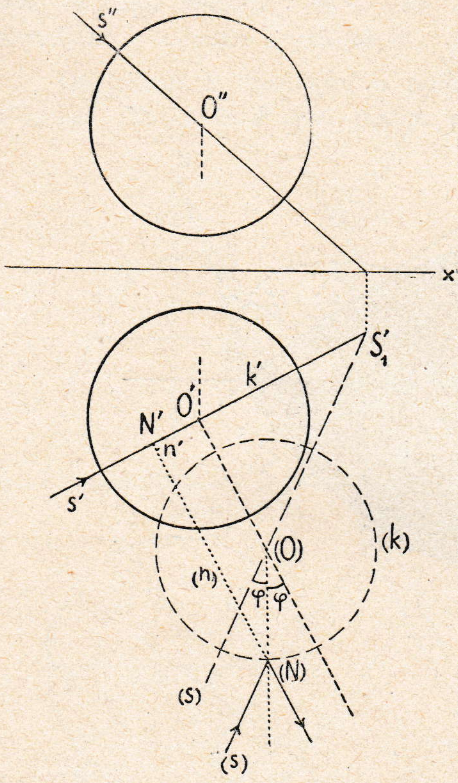


Sl. 234.

u koju se projicira cijela kugla na treću ravninu projekcijā σ. Okrene li se ta kružnica oko traga s' u Π_1, dobit će se c''', gdje je $O'''O' = O''K$. Zraka s imat će treću projekciju s''', koja ide točkom O''' i prvim probodištem S'_1 zrake s. Kružnica k, u kojoj valjak, paralelan sa s, dotiče kuglu, imat će za treću projekciju pružac $k''' \perp s'''$. Krajne su točke C'''

i D''' dirališta dviju izvodnica dodirnoga valjka. Budući da je prva projekcija kružnice c pravac $c' \equiv s'$, bit će C' i D' na s'. Dijametar AB kružnice k, koji je okomit na ravnini σ, ima treću projekciju $A'''B'''$ u O'''. Prve će projekcije A' i B' biti na e'. Poradi simetrije presjeka k prema s' i prema $A'B'$, bit će $A'B'$ i $C'D'$ osi za eliptičnu prvu projekciju kružnice k. Druge su projekcije A'' i B'' točaka A i B na e''.

Posve istim načinom može se naći druga projekcija k'', ako se opet zrakom s položi ravnina $\mu \perp \Pi_2$ i odredi nova treća projekcija kugle.



Sl. 235.

Zamislimo li sve izvodnice opisanoga valjka, koji je paralelan sa s, produžene, dok sijeku Π_1, dobit ćemo za osnovku valjka e l i p s u, koja je ujedno sjena (kosa projekcija) kugle na Π_1 za smjer zraka s. Dodirne izvodnice u točkama C i D (sl. 234.) sijeku Π_1 u $C_I{}^*$ i $D_I{}^*$ na s'. Dodirne pak izvodnice u A i B daju na Π_1 sjene $A_I{}^*$ i $B_I{}^*$, gdje je $A_I{}^* B_I{}^*$ pravac kroz S'_1, normalan na s', jer je u prostoru $AB \perp s$ i $AB \parallel \Pi_1$. Poradi simetrije bit će $A_I{}^* B_I{}^*$ jedna os eliptične sjene $k_I{}^*$, a $C_I{}^* D_I{}^*$ druga njezina os. Posve istim načinom odredit će se i sjena $k_{II}{}^*$ kugle na Π_2. Obje sjene $k_I{}^*$ i $k_{II}{}^*$ nijesu drugo negoli bačene sjene r a s t a v n i c e k na obje ravnine projekcija.

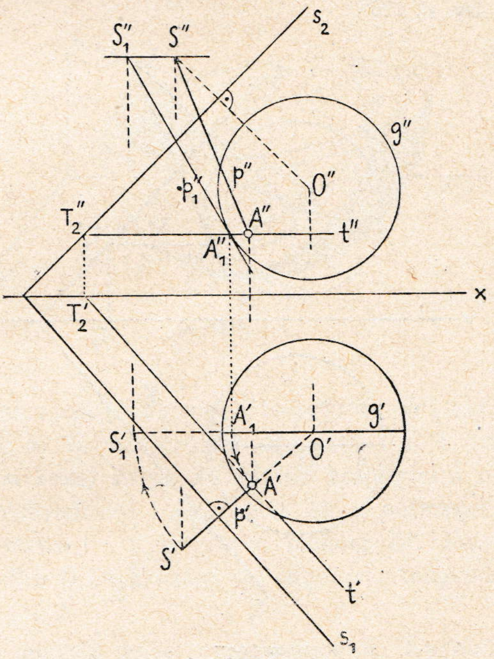
B i l j e š k a. Pokaži s obzirom na § 118., da točke F''' i G''' u sl. 234. daju sjene $F_I{}^*$ i $G_I{}^*$, koje će biti f o k u s i za eliptičku sjenu $k_I{}^*$.

2. Pretpostavit ćemo, da je površina kugle potpuno glatka. Na kugli će biti neka točka N, koja ima to svojstvo, da pravac n kroz N, okomit na Π_1, čini s polumjerom ON isti kut φ, kao što ga čini zraka svjetlosti s kroz N s istim polumjerom, pa da su n, s i ON u istoj ravnini. Takva se točka zove n a j s j a j n i j a točka kugle za projekciju na Π_1. Ako bismo stavili oko u neku točku pravca n gledajući prema Π_1, odrazila bi se zraka s, koja na kuglu upada u N pod kutom φ prema polumjeru ON, upravo u oko. U s l i c i 235. određena je projekcija N' najsjajnije točke za prvu projekciju. Zrakom s kroz O položena

je ravnina $\sigma \perp \Pi_1$; ona siječe kuglu u najvećem krugu k, koji je oko traga s' preložen u (k) na Π_1. Preložaj (s) zrake s izlazi kao spojnica prvoga probodišta S'_1 s (O). Povuče li se $O'(O)$, i raspolovi kut, što ga $O'(O)$ čini s (s), dobit će se točka (N) u sjecištu raspolovnice s (k). Njezina je prva projekcija N' tražena najsjajnija točka za Π_1. U preložaju je nacrtana zraka, koja dolazi na kuglu u (N), a reflektira se na površini pod kutom φ prema $O(N)$.

Druga projekcija N'' točke N nije najsjajnija točka za nacrt. Takva će točka M za Π_2 imati opet to svojstvo, da pravac m kroz M, $m \perp \Pi_2$, i zraka svjetlosti kroz M čine s polumjerom OM isti kut φ, a sva ta tri pravca da su u istoj ravnini. Točka će se M'' za Π_2 dobiti posve istim postupkom kao i N' za Π_1.

129. Tangenta iz točke na kuglu. Sjene kugle za centralnu rasvjetu. *1.* Da se odredi kojagod tangenta iz zadane točke S (slika 236.) na kuglu, mogla bi se točkom S i središtem O kugle položiti kojagod ravnina, koja kuglu siječe u najvećem krugu k, a onda bi se imala iz S povući tangenta na k.



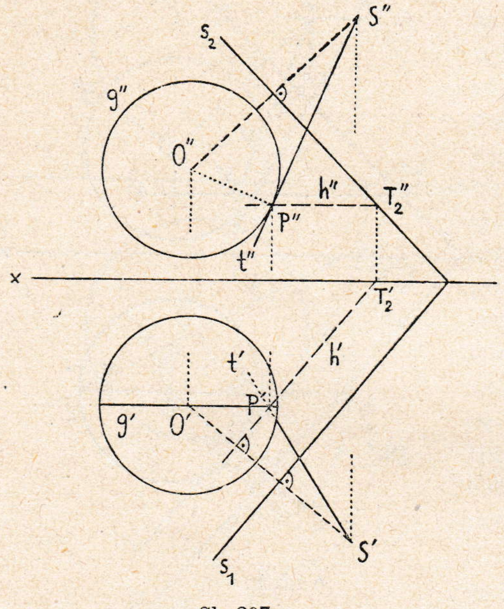
Sl. 236.

Bolje će biti, da se postupa drugim načinom. Sve tangente, povučene iz S na kuglu, imat će dirališta na nekoj kružnici k_1 kugle, koja je usporednik za os rotacije SO (isp. § **117.**). Stožac je (S, k_1) rotacioni stožac, kojemu je ravnina osnovke k_1 normalna na SO. Da se odredi k_1, dosta će biti, da bude poznata jedna osobita tangenta iz S na kuglu; diralištem te tangente položena ravnina normalno na SO sjeći će kuglu u kružnici k_1, pa će svaka točka te kružnice, spojena s točkom S, biti tangenta kugle, jer je izvodnica rečenoga uspravnoga stošca. Sve tangente kugle, povučene točkom S, imaju od s do dirališta istu dužinu (isp. § **5.**, *7*).

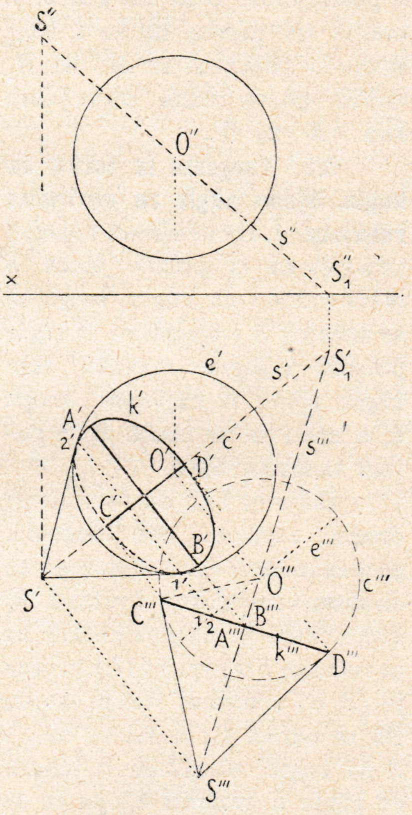
Zaokrenut ćemo točku S oko pravca, koji ide središtem O kugle normalno na Π_1, dok dođe u ravninu glavnoga meridijana u položaj S'_1, S''_1. Tangenta p''_1 iz S''_1 na g'' može se nacrtati u Π_2; diralište joj je A''_1.

Okrenemo li točku A_1 natrag u ravninu meridijana, koji ide kroz S, dobit ćemo diralište A', A'' jedne tangente p', p'' kugle iz točke S. Položi li se točkom A ravnina σ normalno na spojnicu SO (isp. § **49.**), sjeći će ona kuglu u traženoj dodirnoj kružnici k_1, koja se može dalje odrediti prema izvodima u § **123.**

B i l j e š k a. U s l i c i 237. razriješena je ista ta zadaća još jednostavnije tako, da je iz S'' položena tangenta t'' na g''; diralište P'' ima prvu projekciju P' na g', a tražena je tangenta $t \equiv SP$. Ravnina σ položena točkom P normalno na SO siječe opet kuglu u dodirnoj kružnici k_1 opisanoga stošca. Dokaži ispravnost konstrukcije i uzmi u obzir, da je t'' zaista konturna izvodnica stošca u Π_2, ma da S nije u ravnini glavnoga meridijana g! (Isp. sl. 238.).



Sl. 237.



Sl. 238.

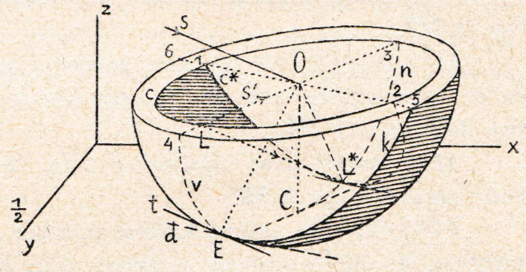
2. Posve istim postupkom kao u sl. 234. odredit će se rastavnica i bačena sjena kugle za c e n t r a l n u rasvjetu (s l i k a 238.), ako je zadana točka S', S'' kao izvor svjetlosti. U slici su prikazane obje osi za prvu projekciju rastavnice (elipse). Bačena sjena izlazi kao osnovka (u ravnini Π_1 dotično Π_2) onoga stošca $S\ (A, B, C, D)$, što ga određuje izvor svjetlosti kao vrh i rastavnica kao jedan usporednik stošca.

Ekvator e kugle ima treću projekciju e''' u dijametru za c''', koji je paralelan sa smjerom s', jer je $e \parallel \Pi_1$. Obje kružnice k i e imaju dvije

zajedničke točke 1 i 2, koje se na treću ravninu projiciraju u istu točku. Obje te točke imaju svoje prve projekcije na e', pa u njima rastavnica k' dotiče ekvator e'.

130. Sjena u nutarnjost šuplje polukugle. Istim načinom kao u sl. 218. nacrtana je u slici 239. kontura vanjskoga dijela površine za kuglu, kojoj je središte O, a posve će se jednako izvesti i kosa projekcija konture za nutarnju površinu šuplje polukugle.

Zraka svjetlosti za paralelnu rasvjetu zadana je kosom projekcijom s i projekcijom s' na ravninu ekvatora, paralelnu s xy. Položi li se kroz s i s' ravnina (koja je normalna na xy), sjeći će ona nutarnju površinu polukugle u polukrugu n, koji je određen točkama 3, L i C, gdje je OC polumjer nutarnje polukugle. Smjerovi su OC i $3L$ konjugirani za eliptičku projekciju n, pa će zato tangenta u C na n biti paralelna s $s' = 3L$. Od krivulje n nacrtan je u slici samo luk $3L^* C$.



Sl. 239.

Točka će L baciti sjenu u nutarnjost polukugle, i to u točku L^*, koja će poradi simetrije biti na krivulji n. U prostoru su dijametri $3L$ i 12 kružnice c među sobom normalni; u kosoj će projekciji biti konjugirani za eliptičku projekciju kružnice c. Polukružnica $1L2$ bacit će u nutarnjost polukugle sjenu c^*, koja izlazi iz točaka 1 i 2, a prol zi točkom L^*. Kontura će za c^* biti elipsa, kojoj su 12 i OL^* konjugirani smjerovi; tangenta u L^* na c^* bit će dakle paralelna s 12.

Na vanjskoj strani polukugle pojavit će se i rastavnica k. Ravnina ss' ($\perp xy$) siječe vanjsku polukuglu u kružnici, koja se koso prikazuje kao elipsa v, a koja se dobiva istim načinom kao i n. Jedna će izvodnica t dodirnoga valjka, koji je opisan (potpunoj) kugli paralelno sa smjerom s, doticati v u točki E. Točkom E, pa točkama 5 i 6, u kojima 12 siječe ekvator vanjske polukugle, prolazit će rastavnica k. Za nju će biti 56 i OE u kosoj projekciji konjugirani smjerovi; tangenta će dakle d u E na k biti paralelna s 56. U slici su za krivulje v i k nacrtani samo vidljivi dijelovi.

Zadaci za vježbu.

410.) Točkom A (3, 3, 2·5) položi kuglu, koja dotiče ravninu σ, položenu točkom A; σ (—2, 3, ?), polumjer kugle $r = 2{\cdot}5$.

411.) Na kuglu, kojoj je središte O (2, 4, 3), a polumjer $r = 2$, položi dodirne ravnine paralelno s ravninom ρ (—1, —2, 3).

412.) Na zadanu kuglu položi dodirnu ravninu, koja s Π_1 zatvara kut $\alpha = 60^0$ (isp. § **82.** završetak, i zadatak 411.). Prikaži i posebni slučaj za $\alpha = 90^0$.

413.) Odredi projekcije kugle, koja ima središte O na pravcu A (—2, 3, 2·5), B (3, 4, 4), polumjer $r = 3$, pa koja dotiče ravninu Π_1.

414.) Položi pravcem p obje dodirne ravnine na zadanu kuglu. Središtem O kugle postavi ravninu $\sigma \perp p$, odredi presjek k ravnine σ s kuglom i probodište s pravcem p (u P), a onda povuci iz P obje tangente na k. Upotrebi preložaj ravnine σ zajedno s k.

415.) Položi dodirnu ravninu na zadani sferoid u jednoj točki te površine (isp. § **127.**).

416.) Odredi bačenu sjenu polukugle u sl. 239. na ravninu xy. Pokaži, da će sjena najniže točke vanjske površine polukugle biti fokus za bačenu sjenu (isp. bilješku u § **128.**).

417.) Izaberi izvor svjetlosti S tako, da bačena sjena zadane kugle na Π_1 bude parabola (isp. § **99.**).

418.) Od neke zadane kugline površine uzmi u obzir samo gornju stražnju četvrtinu, pa odredi sjenu u nutarnjost toga dijela za paralelnu rasvjetu. Upotrebi treću projekciju na ravninu $\mu \perp \Pi_2$, koja je položena središtem kugle.

419.) Odredi bačene sjene kugle u sl. 238. na Π_1 i Π_2 za S kao izvor svjetlosti.

420.) Gornja osnovka zadanoga uspravnoga kružnoga valjka (donja je osnovka u Π_1) ujedno je usporednik donje polovine kugle, kojoj je polumjer veći od polumjera valjka. Odredi bačenu sjenu kugle na valjak.

421.) Položi središtem zadane kugle kakvugod ravninu ρ i odredi sjenu gornje polovine kugle na ravninu ρ uz paralelnu rasvjetu. Nađi najprije rastavnicu, a onda bačenu sjenu rastavnice na ρ!

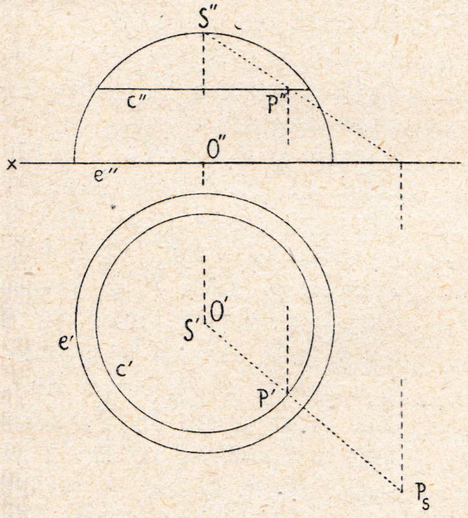
IV. Stereografska projekcija.

131. O načinu stereografskoga projiciranja. Uzmimo na kuglinoj površini neku čvrstu točku S i položimo gdjegod ravninu Π normalno na dijametar kugle, koji ide točkom S. Spoji li se točka S s kojomgod točkom P kugline površine pravcem, pa se odredi probodište P_s pravca SP s ravninom projekcijâ Π, dobiva se stereografska projekcija P_s točke P. Točka je S središte projiciranja; taj način određenja pripada dakle u centralnu projekciju (gl. § **1.**, *3*). Ravnina projekcijâ Π polaže se obično središtem O kugle, ili onom točkom (S_1), u kojoj dijametar točke S

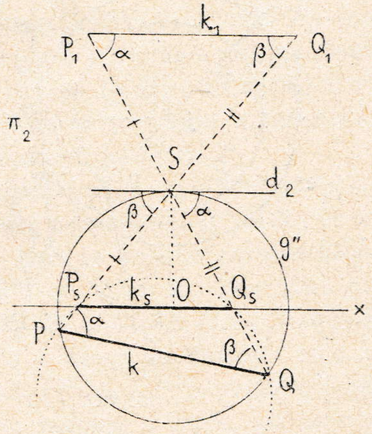
kuglu po drugi put sijeće. Projekcije se za različne paralelne položaje ravnine Π prema točki S ne mijenjaju bitno; one ostaju slične među sobom.

U slici 240. prikazana je polukugla u ortogonalnoj projekciji; središte joj je O u Π_1. Najviša točka S na polukugli uzeta je za središte, a ravnina Π_1 za ravninu projekcijâ stereografskog projiciranja. Točka P, koja je izabrana na polukugli, i to na usporedniku c', c'', spojena je s S; probodište je P_s pravca SP s ravninom Π_1 stereografska projekcija za P. Sve će točke P na gornjoj polukugli imati projekcije P_s izvan ekvatora e, a sve točke donje polukugle u onom dijelu, koji omeđuje ekvator, t. j. u krugu ekvatora.

Taj je način projiciranja uveden zato, da se u ravnini predoče pojedine točke i lukovi neke sferne površine, na pr. zemaljske površine ili nebeskoga svoda. Ta se projekcija upotrebljava već u najstarije doba za predočivanja u geografskim kartama i u astronomiji.



Sl. 240.



Sl. 241.

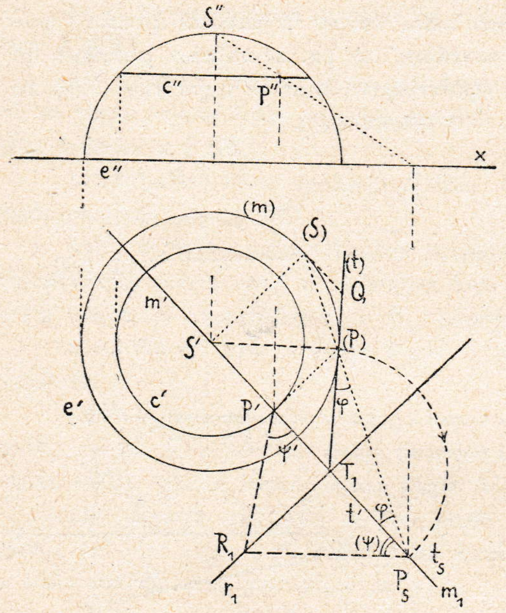
Bilješka. Začetnikom stereografske projekcije drže neki Hiparha, drugi Ptolemeja (u 2. vijeku pr. Kr.). Svakako je Ptolomej prvi izdao djelo o toj projekciji. U 17. vijeku bavio se svojstvima stereografske projekcije iscrpljivo Agvilonij (u Nizozemskoj).

132. Glavna svojstva stereografske projekcije. Iz sl. 240. izlazi, da će sve točke usporednika c imati stereografske projekcije P_s, P_s^1. . . ., koje su jednako udaljene od središta O kugle, t. j. stereografska će projekcija svakoga usporednika c kugle (ili kružnice na kugli, kojoj je ravnina paralelna s Π_1) biti kružnica c_s na Π_1, koja ima središte u O'. Svaki meridijan, koji uzimamo kao najveći krug kugle kroz središte projiciranja (ili pol) S, imat će za stereografsku projekciju pravac, koji ide središtem O' kugle. Svaka

će pak kružnica na kugli, koja prolazi točkom S, imati za stereografsku projekciju pravac, koji uopće ne će sadržavati točke O'. Takov je pravac presječnica ravnine projekcijâ Π_1 s ravninom pomenute kružnice, koja ide kroz S.

Još je općenije svojstvo stereografske projekcije, da će kojagod kružnica k na kuglinoj površini imati za stereografsku projekciju opet kružnicu k_s. To se svojstvo može ovako dokazati (slika 241.).

Uzmimo, da je središte O kugle u osi x; glavni je meridijan $g \equiv g''$ kugle u nacrtnoj ravnini Π_2. Ravnina je Π_1 ravnina projekcijâ za stereografsko projiciranje. Na kugli je izabrana koso položena kružnica k, koja se na Π_2 prikazuje kao pružac PQ. Projiciramo li k iz pola S kugle na Π_1 stošcem (S, k), dobit ćemo kao projekciju krivulju k_s, koja se prikazuje kao pružac $P_s Q_s$. Ravnina je Π_2 ujedno ravnina simetrije za kuglu, za kružnicu k, za stožac (S, k) i za krivulju k_s. Produžimo izvodnice SP i SQ stošca preko vrha S i učinimo $SP = SP_1$, $SQ = SQ_1$. Pruščem je dakle $P_1 Q_1$ predočena kružnica k_1 stošca, pa će biti $k_1 \cong k$; ravnina je kružnice k_1 normalna na Π_2 poradi simetrije stošca prema Π_2. Položimo dalje u S dodirnu ravninu δ na kuglu; njezin će trag na ravnini Π_2 biti tangenta d_2 na g''. Iz sukladnosti trokuta PQS i $P_1 Q_1 S$ izlazi, da su kutovi kod P i P_1 među sobom jednaki (α), a opet kutovi kod Q i Q_1 jednaki (β). Tangenta d_2 na g'' čini s tetivom PS isti kut β, kao što je obodni kut PQS, a kut je tangente d_2 i tetive SQ jednak obodnom kutu QPS ili α. Odatle izlazi, da je $d_2 \parallel P_1 Q_1$ ili $P_1 Q_1 \parallel x$. Kako $P_1 Q_1$ predočuje kružnicu na stošcu (S, k), tako će i prerez k_s toga stošca ravninom Π_1, koja je paralelna s ravninom kruga k_1, biti opet kružnica. (Isp. § **99.**, sl. 196.).



Sl. 242.

Stereografska je projekcija svake kružnice k na kugli, koja ne ide središtem projiciranja S, opet kružnica k_s. Kružnica opisana tetivnom četverokutu $P Q Q_s P_s$ bit će glavni meridijan kugle, koja

poradi simetrije prema Π_2 prolazi kružnim presjecima k i k_s stošca (S, k). Isp. § **99.** i zad. 402.

133. Svojstvo konformnosti stereografske projekcije. Zamislimo, da su na kugli zadane kakvegod dvije kružnice; jedno njihovo sjecište neka bude točka P. Tangente na obje kružnice, položene u točki P, čine kut φ, kojim se označujo kut, što ga čine obje kružnice. Dokazat ćemo ovdje, da će stereografske projekcije pomenutih dviju kružnica činiti isti kut φ, kao što i kružnice na kugli. Ako je dakle na kugli zadan sferni trokut, pa se on projicira stereografski na ravninu, pojavit će se u projekciji isti kutovi, koji se javljaju na sfernom trokutu. Uzmemo li, da je sferni trokut na kugli veoma malen tako, da se može približno uzeti kao ravan trokut, bit će njegova stereografska projekcija trokut, koji ima ista tri kuta, kao i onaj prvi. Oba će trokuta biti slična, imat će isti oblik (formu). Dijelovi kugline površine (na pr. površine zemlje) projicirat će se stereografski u takove slike, koje su u najmanjim svojim dijelovima slične pripadnim dijelovima na kugli. To se svojstvo zove konformnost.

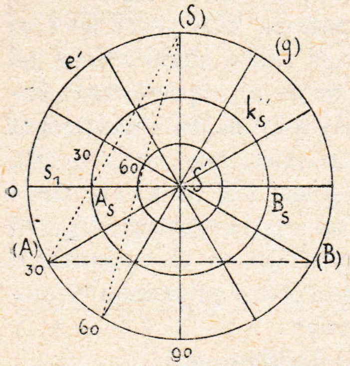
U slici 242. prikazan je dokaz za svojstvo konformnosti.

Na kugli je izabrana točka P, kojoj je stereografska projekcija P_s. Zamislimo točkom P položen meridijan m kugle; trag je ravnine μ toga meridijana na Π_1 pravac m_1. Preložimo m i P oko m_1 u Π_1 i to u $(m) \equiv e'$, dotično P u (P). Središte projiciranja S doći će u preložaju u točku (S) na (m). Pravac $(S)(P)$ mora ići stereografskom projekcijom P_s.

Točkom P povući ćemo tangentu t na meridijan m; u preložaju je (t) tangenta za (m) u (P). Probodište T_1 tangente s ravninom Π_1 točka je na tragu m_1. Kako je t priklonica za ravninu ρ, koja je dodirna ravnina kugle u točki P, bit će trag te ravnine pravac $r_1 \perp m_1$ kroz T_1. Povucimo još $(S)\,Q \parallel m_1$, dobit ćemo dva slična trokuta $Q\,(S)\,(P)$ i $T_1\,(P)\,P_s$. Budući da je prvi od tih trokuta istokračan, bit će i drugi istokračan; zato je $\sphericalangle T_1\,(P)\,P_s = \sphericalangle T_1\,P_s\,(P)$ i ujedno $T_1\,P_s = T_1\,(P)$, t. j. P_s je preložaj točke oko traga r_1. Položi li se dakle u P dodirna ravnina ρ kugle, pa se ona preloži oko traga r_1 u Π_1, bit će preložaj točke P, t. j. P_s, stereografska projekcija točke P. Spojimo li kojugod točku R_1 na r_1 s P', dobit ćemo projekciju druge neke tangente za kuglu u točki P (svi su pravci kroz P u dodirnoj ravnini ρ tangente za kuglu); spojnica će $R_1\,P_s$ biti preložaj te tangente u Π_1. Isti onaj kut, što ga čine tangente t i $P\,R_1$ kugle u prostoru, javlja se u stereografskoj projekciji kao kut (ψ), što ga čine preložaji, t. j. obje stereografske projekcije t_s i $P_s\,R_1$ obadviju onih tangenata. Dvije kružnice kugle, koje idu točkom P, a pravci su im t i $P\,R_1$ tangente, imat će dvije stereografske projekcije (kružnice), koje idu kroz P_s, a pravci su im t_s i $P_s\,R_1$ tangente. Kut je dakle ψ, što ga čine obje kružnice na kugli, onaj isti, koji zatvaraju obje

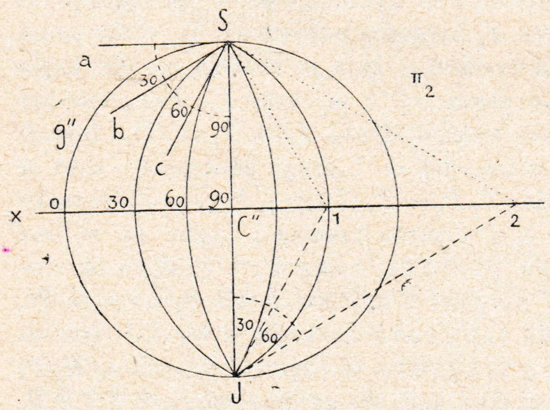
stereografske projekcije tih kružnica. Budući da isti odnosi vrijede za sve točke i kružnice na kugli, svojstvo je konformnosti za stereografsku projekciju dokazano.

134. Uporaba stereografske projekcije (mreža meridijanâ i usporednikâ). 1. Stereografska polarna projekcija. U slici 243. prikazana je polukugla tako, da joj je ekvator e' u ravnini crtnje Π_1, a središte je S stereografskog projiciranja pol kugle nad tom ravninom (kao kod kotirane projekcije!). Svi će se meridijani prikazati stereografski kao dijametri ekvatora. Uzmimo na donjoj polovini kugle (koja je ispod ravnine crtnje) usporednik u geografskoj širini 30^0. Polom S i točkom 0 na ekvatoru položit ćemo ravninu σ normalno na Π_1. Ta će ravnina sjeći ravninu usporednika u dijametru usporednika AB. Preložimo sad ravninu σ oko njezina traga s_1 u Π_1; pol će S doći u (S) na



Sl. 243.

jednu stranu, a pravac AB u $(A)(B)$ na drugu stranu od s_1. Projicira li se A iz S na Π_1, dobit ćemo stereografsku projekciju te točke u A_s; točka će A_s biti na s_1. Isto vrijedi i za B_s. Pružac je dakle $A_s B_s$ dijametar za stereografsku projekciju izabranoga usporednika. Posve istim načinom dobivaju se stereografske projekcije ostalih usporednika. Ovako se prikazuju na Π_1 dijelovi zemaljske površine, koji su u blizini pola zemaljskoga. Poradi konformnosti sijeku se svi meridijani i usporednici u projekciji (sl. 243.) upravo kao i u prostoru pod pravim kutom.

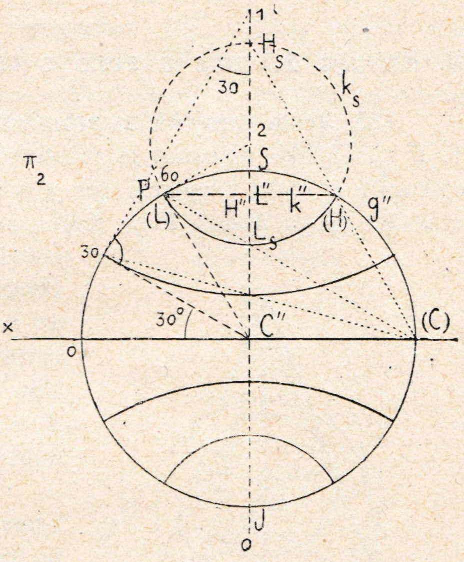


244.

2. Stereografska ekvatorijalna projekcija. Pod ekvatorijalnom projekcijom razumije se takova stereografska projekcija, za koju je središte projiciranja C točka ekvatora. Uzet ćemo (slika 244.) kuglu, kojoj je središte u Π_2, a točka C, koja je na kugli najdalja od Π_2 i pred tom ravninom, neka bude središte projiciranja. Ravnina

je Π_2 ujedno ravnina stereografskih projekcija. Stereografske slike svih meridijana bit će kružnice, koje će prolaziti polovima S i J kugle (ti su polovi u ravnini Π_2). Uzmimo glavni meridijan g'' kao početni; meridijan, koji s g'' čini kut 30_0, imat će stereografsku sliku, koja će s g'' činiti isti takov kut od 30^0 (gl. § **133.**). Povući ćemo dakle u S tangentu a na g'', a onda kroz S pravac b tako, da bude $\sphericalangle a b = 30^0$. Postavimo li u S normalu na b, koja x siječe u točki 1, bit će $1\,S$ polumjer za stereografsku sliku meridijana od 30^0 sferne dužine. Isto se tako dobiva meridijan za 60^0; središte je točka 2 na x, i t. d. Iz slike izlazi, da je $\sphericalangle C''J1 = 30^0$. i t. d.

Za istu kuglu i za isto središte C stereografskoga projiciranja na Π_2 odredit ćemo slike usporednikâ. Budući da je os kugle $o \equiv SJ$ u ravnini Π_2, a svaki je usporednik, kao i njegova stereografska projekcija, simetričan prema ravnini $C\,o$, bit će središte za sliku usporednika na pravcu o (slika 245.).



Sl. 245.

Odredit ćemo na glavnom meridijanu g točku P u sfernoj širini od 60^0. Tom će točkom, koja je u ravnini Π_2, prolaziti stereografska slika pripadnoga usporednika k. Kako usporednik siječe glavni meridijan g'' u prostoru pod kutom 90^0, tako će i slika usporednika sjeći g'' u točki P pravokutno. Položi li se dakle u P tangenta na g'', koja o siječe u točki 2, bit će ova točka središte za sliku k_s usporednika. Tangente $P2$ i PC'' zaista su normalne, pa se g i k_s sijeku pravokutno.

Usporednik k projicira se normalno na Π_2 u tetivu $k'' \perp o$ kroz P. Dijametar za k, koji stoji na Π_2 normalno, ima krajne točke H i L; točka H neka bude pred Π_2, a L iza Π_2. Okrenimo središte C zajedno s HL oko o u Π_2; središte će doći u (C) na g'', a H i L u (H) i (L) na g''. Zrake $(C)(H)$ i $(C)(L)$ daju na o stereografske projekcije H_s i L_s krajnih točaka dijametra HL za sliku k_s usporednika k. Istim će se načinom dobiti slika za usporednik pod 30^0 i t. d.

Ekvatorijalnom se projekcijom prikazuju dijelovi zemaljske površine u blizini ekvatora.

Zadaci za vježbu.

422.) Uzmi u sl. 242. kakvugod kružnicu na kugli (određenje s tri točke) i odredi stereografsku projekciju te kružnice.

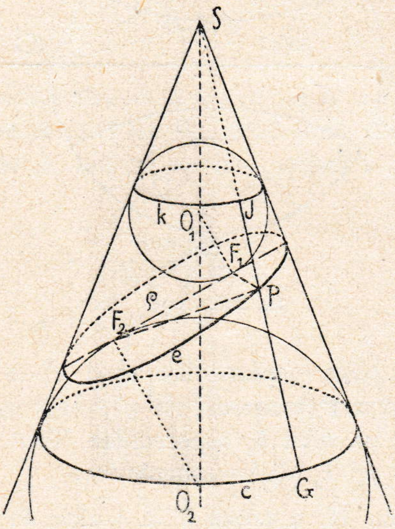
423.) Poznata je stereografska projekcija k_s neke kružnice k na kugli; odredi tragove ravnine ρ, u kojoj je kružnica k.

424.) Nacrtaj obje slike 244. i 245. u jednoj slici (za istu kuglu): tako će se dobiti mreža usporednika i meridijana za planiglob. Pokaži na toj slici planimetrijskim putem, da se svi meridijani i usporednici sijeku pod pravim kutom.

V. Krivulje 2. reda u svezi s kuglom i s rotacionim površinama.

135. Vrste presjekâ za rotacioni stožac ravninom. Dandelinov poučak.

1. U slici 246. prikazan je rotacioni stožac zajedno s kosim ravnim presjekom e u kosoj projekciji (os y čini s x kut $\alpha = 90^0$). Uzet ćemo, da se u stožac mogu upisati dvije kugle, sa svake strane ravnine ρ presjeka po jedna tako, da obje kugle dotiču ravninu ρ. Dirališta su točke F_1 i F_2. U slici je uzeto, da su glavni meridijani kugala i stošca u ravnini crtnje; u toj će dakle ravnini simetrije biti i os presjeka e, i oba će dirališta F_1 i F_2 biti na toj osi. Obje upisane kugle dotiču stožac u kružnicama k i c.



Sl. 246.

Izabrat ćemo na e kojugod točku P i povući PF_1, PF_2 i izvodnicu stošca PS; ta izvodnica siječe k u točki J, a c u točki G. Imat ćemo $PF_1 = PJ$, jer su to dužine dviju tangenata povučenih iz točke P na kuglu sa središtem O_1. S istog će razloga biti opet $PF_2 = PG$. Prema tome imamo $PF_1 + PF_2 = PJ + PG = JG =$ konst.

Dužina je naime JG na izvodnici SP među obadvije dodirne kružnice k i c konstantna za sve položaje točke P na presjeku e. Taj je dakle presjek e krivulja, za koju je zbroj daljinâ svake njezine točke (P) od dvije čvrste točke F_1 i F_2 konstantna. Ta je krivulja elipsa, za koju su F_1 i F_2 fokusi, a JG dužina velike osi*).

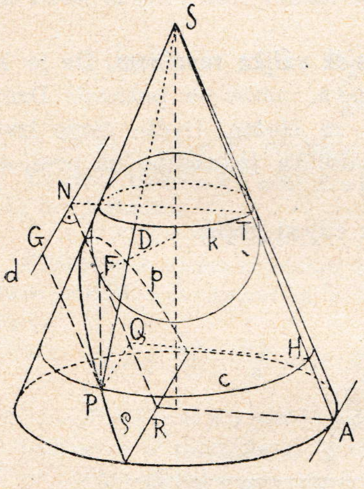
Taj dokaz vrijedi samo za rotacioni stožac. No ima sličnih načinâ, kako se može pokazati i za ostale stošce, koji nijesu rotacioni (za kružne kose stošce), kad će presjeci ravninama biti elipse.

*) Isp. Mjerstveno crtanje za IV. razr., str. 2.

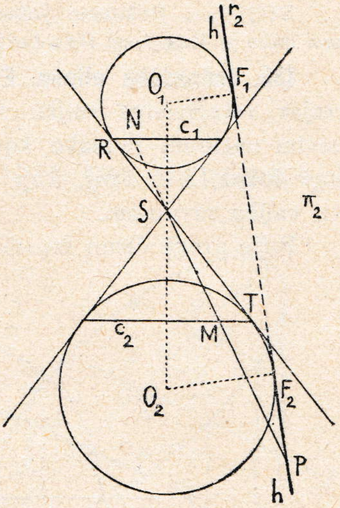
2. U slici 247. prikazan je opet u kosoj projekciji ($\alpha = 90^0$) rotacioni stožac presječen ravninom ρ, koja je položena paralelno s dodirnom ravninom po izvodnici SA. Pokazat ćemo, da je presječna krivulja parabola (isp. § **99.**).

U stožac ćemo upisati kuglu, koja dotiče ravninu ρ presjeka u točki F, a stožac u kružnici k, koja na SA daje sjecište T. Ravnina te kružnice i ravnina ρ sijeku se u pravac d, koji je normalan na pravcu $RN \parallel SA$. Ravnina je naime $SARN \perp \rho$ ravnina simetrije za stožac i za presjek p, dakle i za pravac d.

Uzmimo na p kojugod točku P i povucimo PF i PS; pravac PS siječe dodirnu kružnicu k u točki D. Oba su prušca PF i PD tangente iste kugle, dakle jednako dugi. Položimo dalje točkom P ravninu normalno



Sl. 247.



Sl. 248.

na os stošca; ona će stožac sjeći u kružnici c, koja na izvodnici SA daje sjecište H, a pravac će RN sjeći u Q. Povucimo napokon $PG \parallel RN$ do sjecišta G na d. Imat ćemo

$PD = HT = QN = PG$, a kako je $PD = PF$, bit će $PF = PG$, gdje je $PG \perp d$. Točke P krivulje p imaju dakle svojstvo, da je uvijek njihova daljina od čvrste točke F jednaka daljini od čvrstoga pravca d. Krivulja je p zato parabola.

3. U slici 248. nacrtana je ortogonalna projekcija rotacionoga stošca na Π_2. Ta je ravnina ujedno ravnina simetrije za stožac, koji je produžen preko vrha S.

Položit ćemo ravninu $\rho \perp \Pi_2$ tako, da ona siječe obje grane stošca u krivulji h. Ta će se presječna krivulja h projicirati na Π_2 u dva pravca.

Stošcu ćemo upisati dvije kugle, koje ujedno dotiču ravninu ρ. Dodirne su kružnice na stošcu c_1 i c_2, a dirališta na ρ točke F_1 i F_2. (Središta su O_1 i O_2 obadviju kugala u Π_2). Dužina je jedne izvodnice stošca između c_1 i c_2 pružac RT.

Uzmimo na presjeku h kojugod točku P i spojimo je s F_1 i s F_2, pa s vrhom S. Izvodnica će PS sjeći c_1 i c_2 u N i M. Budući da je

$$PF_1 = PN \text{ i } PF_2 = PM,$$

jer su to dva para jednakih tangenata iz P na kugle O_1 i O_2, bit će

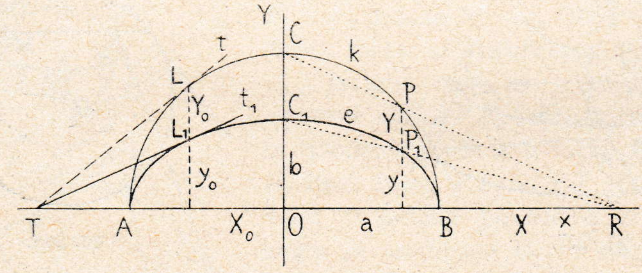
$$PF_1 - PF_2 = PN - PM = MN = RT = \text{konst.};$$

vidi se, da je presječna krivulja takova, da je razlika daljina svake njezine točke od dvije čvrste točke F_1 i F_2 konstantna. Krivulja je h hiperbola; njezini su fokusi točke F_1 i F_2.

Bilješka. Prikazane jednostavne dokaze za različne vrste presjeka stošca ravninama izveo je Belgijanac Dandelin (g. 1822.).

136. Jednadžba elipse. Elipsa kao presjek valjka ravninom. Da je kosi presjek rotacionoga valjka ravninom elipsa, može se pokazati Dandelinovim načinom jednako kao u § **135.**, 1. za stožac. Ovdje ćemo izvesti drugi dokaz, i to onaj, koji dovodi do analitičke jednadžbe za presječnu crtu valjka ravninom.

Prije svega ćemo izvesti jednadžbu za elipsu uopće.



Sl. 249.

U slici 249. uzeta je u Π_2 kružnica k, pa je zaokrenuta oko osi x tako, da se najviša točka C kružnice projicira na Π_2 poslije zaokreta u C_1. Polumjer za k neka bude a; dužina $OC_1 = b$. Uzmemo li na k kojugod točku P, povučemo CP do R na x, a onda RC_1, dobit ćemo u sjecištu ovoga pravca RC_1 i ordinale kroz P točku P_1, koja će biti na projekciji e zaokrenute kružnice.

Obilježimo li os x i vertikalni dijametar za k oznakama X i Y, bit će u analitičkoj ravnini XY jednadžba kružnice k (na kojoj su točke P s koordinatama X i Y):

$$X^2 + Y^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1).$$

Označimo li koordinate za točke P_1 na e s x i vidi se iz slike, da će za k i e biti

$$X = x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

(na pr. za P i P_1). Za svake će dvije pripadne točke (P i P_1) postojati razmjer (isp. § **70.**)

$$Y : y = a : b$$

ili

$$Y = \frac{a\,y}{b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

Umetnimo u jednadžbu 1) vrijednosti iz 2) i 3); tim ćemo iz jednadžbe kružnice k dobiti jednadžbu krivulje e:

$$x^2 + \frac{a^2\,y^2}{b^2} = a^2$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a to je za sve točke P_1 središna jednadžba elipse, koja ima poluosi a i b.

Tangenta kružnice k u točki L s koordinatama X_0, Y_0 ima jednadžbu

$$t \; . \; . \; . \; . \; . \; X_0\,X + Y_0\,Y = a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4).$$

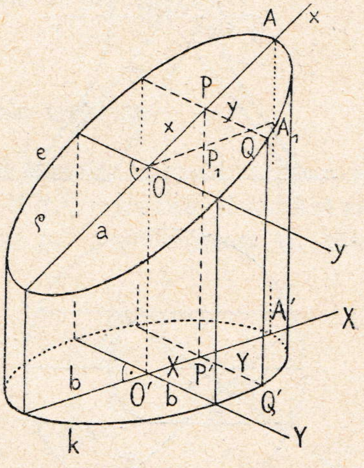
Umetnemo li ovamo vrijednosti iz 2) i 3), dobit ćemo jednadžbu tangente za elipsu u točki L_1 (x_0, y_0):

$$x_0\,x + \frac{a\,y_0}{b} \; \frac{a\,y}{b} = a^2$$

ili

$$t_1 \; . \; . \; . \; . \; b^2\,x_0\,x + a^2\,y_0\,y = a^2\,b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5).$$

Učinimo li u jednadžbi 4) $Y = o$, bit će $X_0\,X = a^2$; učinimo li pak u jednadžbi 5) $y = o$, bit će $x_0\,x = a^2$. Dobivamo dakle $X_0\,X = x_0\,x$, no kako je $X_0 = x_0$, bit će $X = x$, t. j. tangenta kružnice i tangenta elipse, koje imaju dirališta na istoj ordinali, prolaze istom točkom T na osi x.



Sl. 250.

U slici je 250. prikazan uspravni valjak, kojemu je osnovka kružnica k u Π_1, i presjek e toga valjka s koso položenom ravninom ρ. Ravnina, položena osju $O\,O'$ valjka normalno na ρ, bit će ravnina simetrije za k i za e; ona siječe ravninu osnovke u pravcu X, a ravninu ρ u pravcu x. Središtima O i O' povući ćemo u ρ i Π_1 pravce $y \perp x$ i $Y \perp X$. Uzmimo na x neku točku P; njezina je projekcija P' na X. Položimo li točkom P tetivu paralelno s y, projicirat će se ona izvodnicama valjka u paralelnu i jednako veliku tetivu kroz P' za k. Polumjer kružnice k označit ćemo s b, a polovinu osi presjeka

e na x s a. Povući ćemo još $O A_1 \parallel O' A'$; pravac $O A_1$ siječe $P P'$ u točki P_1.

U analitičkoj ravnini $X O' Y$ imat će kružnica k jednadžbu:

$$X^2 + Y^2 = b^2 \ldots\ldots 6).$$

Točka će Q' na k imati koordinate X, Y. Za točku Q na e bit će $PQ = P'Q'$, t. j. uopće

$$y = Y \ldots\ldots\ldots 7).$$

Za točku Q izlazi dalje iz razmjera $O P_1 : O A_1 = O P : O A$ ili (jer je $O P_1 = O' P' = X$)

$$X : b = x : a,$$

t. j.

$$X = \frac{b}{a} x \ldots\ldots 8).$$

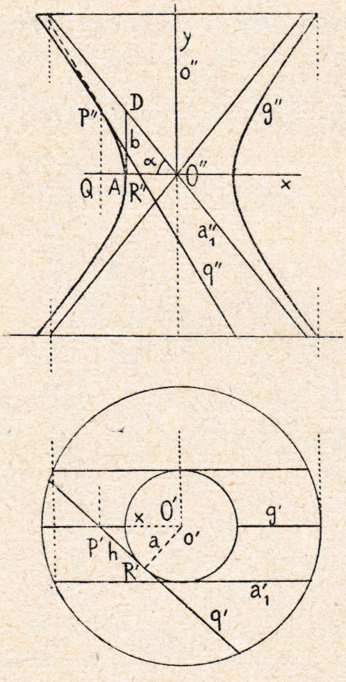
Uvrstimo li vrijednosti iz 7) i 8) u jednadžbu 6) kružnice k, dobit ćemo jednadžbu za točke Q krivulje e u analitičkoj ravnini $x O y$, t. j.

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dakle jednadžbu elipse e kao presječne crte valjka ravninom ρ.



Sl. 251.

137. Jednadžba meridijana za jednoplošni hiperboloid. U § **121**. bio je izveden rotacioni jednoplošni hiperboloid okretanjem pravca q oko osi o, koja je prema pravcu q mimosmjerna. Da su meridijani te površine zaista hiperbole, pokazat ćemo ovdje tako, da izvedemo jednadžbu za glavni meridijan (slika 251.).

Pravac q, koji se okreće oko osi o, neka zatvara s Π_1 kut α; taj se kut α vidi u Π_2 u pravoj veličini za onaj položaj a_1 pravca q, kad je $a'_1 \parallel x$, t. j. $a_1 \parallel \Pi_2$. Pravac q siječe glavni meridijan g u točki P', P'', a ravninu najužega kruga, koji ima polumjer a, u točki $R' R''$. Ordinala točke P ima na ravnini najužega kruga nožište Q. U prostoru je $\triangle\ P Q R$ pravokutan trokut, kojemu je kateta $Q R$ u pravoj veličini jednaka $P' R'$; kut kod R ima pravu veličinu α. Bit će dakle

$$\frac{P Q}{Q R} = \operatorname{tg} \alpha;$$

označimo li visinu PQ točke P nad ravninom najužega kruga s y i postavimo $P'R' = QR = h$, imat ćemo

$$\frac{y}{h} = \operatorname{tg} \alpha \; \ldots\ldots\ 1).$$

Iz trokuta $P'R'O'$ izlazi $O'P'^2 - P'R'^2 = a^2$, ili ako postavimo $O'P' = O''Q = x$, jer se ta dužina mijenja okretanjem pravca q, bit će

$$x^2 - h^2 = a^2 \; \ldots\ldots\ 2).$$

Umetnemo li vrijednost za h iz 1) u jednadžbu 2), bit će

$$x^2 - \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = a^2$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1.$$

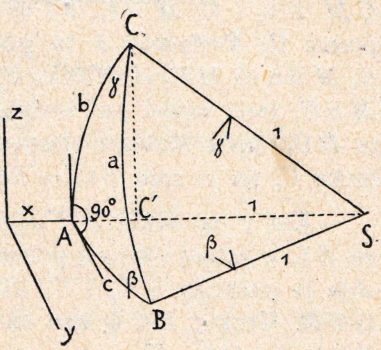
Iz slike izlazi, da je $DA = AO''. \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha$; ako označimo $DA = b$, bit će jednadžba glavnoga meridijana g''

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

to je pak zaista jednadžba hiperbole za osi koordinatâ x i y. Pravac je a''_1 jedna asimptota te hiperbole; a i b njezine su poluosi.

VI. Zadaće o razrješavanju trobrida.

138. Pravokutni sferni trokut i pripadni trobrid. Trobrid, kojemu je vrh S, a bridovi su mu SA, SB, SC (slika 252.), neka ima plošni kut na bridu SA $\alpha = 90^0$. Opišemo li iz S kuglu (na pr. s polumjerom 1), koja tri brida siječe u točkama A, B i C, nastat će sferni pravokutni trokut BAC, koji ima kutove $\alpha = 90^0$, β, γ i stranice a, b, c, od kojih je prva hipotenuza, a obje se ostale označuju kao katete. Poznato je iz sferne trigonometrije, da je za određenje trobrida potrebno poznavanje triju njegovih česti. U našem trobridu S (B, A, C) ili u pravokutnom sfernom trokutu BAC uzet ćemo kao poznate česti bridne kutove ili stranice b i c.

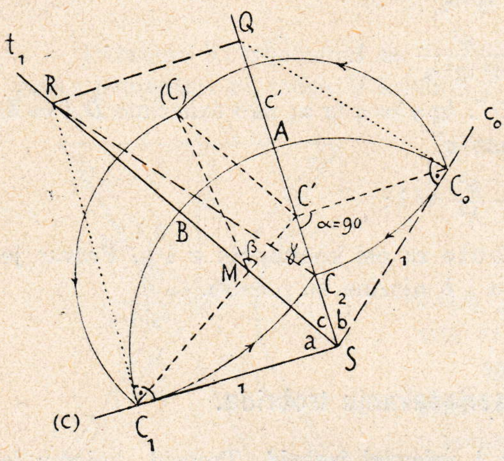


Sl. 252.

Iz zadanih česti odredit ćemo konstrukcijom ostale tri česti, a onda ćemo izvesti iz iste te konstrukcije sve formule sferne trigonometrije, koje vrijede za pravokutni sferni trokut.

Bilješka. Grafičkim načinom razrješavanja sfernih trokuta bavio se i naš matematik svjetskoga glasa R. J. Bošković (1711.—1787.) u djelu „Trigonometriae sphaericae constructio" (izdano u Rimu 1737.). — Formule za pravokutni sferni trokut izlaze iz t. zv. Neperova pravila, koje je Neper prikazao prvih godina 17. vijeka.

Uzet ćemo, da je ravnina crtnje ujedno ravnina projekcijâ Π za kotirano projiciranje. Obadva poznata bridna kuta b i c razastrijet ćemo u ravninu crtnje (slika 253.). Iz S opisana kružnica (s polumjerom 1) određuje na kracima kutova b i c točke C_0, A i B. Lukovi AB i AC_0 jesu dvije stranice sfernoga trokuta. Pobočka SAB nalazi se u ravnini crtnje, a pobočka SAC_0 bit će oko SA zaokrenuta u SAC u prostor tako, da ravnina SAC stoji normalno na Π; trag će te ravnine biti pravac SA, u koji pada ujedno projekcija c' brida SC. Ravnina Π i SAC zatvaraju pravi kut $\alpha = 90^0$ našega trobrida. Projekcija C' vrha C pada dakle u C'; točka je C određena kotom $C_0 C'$.



Sl. 253.

Zamislimo, da je iz C spuštena normala na krak SB (ili t_1); nožište je normale točka M. Trokut je $CC'M$ pravokutan: njegov je preložaj oko MC' u Π trokut $MC'(C)$, gdje je $C'(C) = C'C_0$. Budući da je $CM \perp t_1$ i $C'M \perp t_1$, bit će $\sphericalangle (C)MC' = \beta$ prikloni kut pobočke SBC prema Π. Preložimo li tu pobočku oko t_1 u Π, past će C u C_1, gdje je $C_1 M \perp t_1$ i $MC_1 = M(C)$. Pravac je SC_1 preložen brid SC, a kut je MSC_1 treći bridni kut trobrida, t. j. a. Kružnica C_0AB ide kroz C_1, pa je BC_1 treća stranica sfernoga trokuta. Točke C_0 i C_1 preložaji su iste točke C, pa je zato $SC_0 = SC_1$.

Kut γ na bridu SC odredit će se tako, da se u C postavi normala na SC u jednoj i drugoj pobočki CSA i CSB. U preložaju su postavljene obje te normale u C_0 i C_1 na c_0 i (c); njihova su probodišta na Π točke Q i R. Trokut RCQ ima na vrhu C traženi prikloni kut γ. Preložimo li RCQ oko RQ u Π, past će preložaj C_2 točke C na c', pa će biti $QC_2 = QC_0$ i ujedno $RC_2 = RC_1$.

Iz slike 253. izlaze ove formule, ako uzmemo u obzir, da je $SC_0 = SC_1 = 1$.

Uza zadano b i c imamo

$$SC' = \cos b, \qquad \frac{SM}{SC'} = \cos c, \qquad SM = \cos a, \text{ dakle}$$

$$\underline{\cos a = \cos b \,.\, \cos c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1).}$$

Dalje je uz zadano a i β:

$$\frac{C'(C)}{M(C)} = \sin \beta, \quad MC_1 = \sin a, \quad C'C_0 = \sin b; \quad \text{poradi } C'(C) = C'C_0$$

i $M(C) = MC_1$ izlazi dakle:

$$\underline{\sin b = \sin a \,.\, \sin \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2),}$$

a sličnim postupkom

$$\underline{\sin c = \sin a \,.\, \sin \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3),}$$

gdje se funkcije za a i c određuju iz trokutâ SC_1R i SRQ.

Za a, c i β imamo:

$$\frac{MC_1}{MS} = \operatorname{tg} a, \quad \frac{MC'}{M(C)} = \cos \beta, \quad \frac{MC'}{MS} = \operatorname{tg} c, \text{ bit će dakle}$$

$$\underline{\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \,.\, \cos \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4),}$$

a sličnim načinom

$$\underline{\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \,.\, \cos \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5).}$$

Za b, c i β bit će:

$$\frac{MC'}{C'S} = \sin c, \quad \frac{(C)C'}{MC'} = \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{C_0C'}{C'S} = \operatorname{tg} b, \text{ dakle:}$$

$$\underline{\operatorname{tg} b = \sin c \,.\, \operatorname{tg} \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6),}$$

a slično

$$\underline{\operatorname{tg} c = \sin b \,.\, \operatorname{tg} \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7).}$$

Za b, β i γ imamo:

Iz formule 4) izlazi, da je $\cos \beta = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$; prema tome će biti

$$\frac{RQ}{QS} \cdot \frac{1}{RC_1} = \cos \beta, \quad \frac{1}{QS} = \cos b, \quad \frac{RQ}{RC_2} = \sin \gamma; \text{ izlazi dakle:}$$

$$\underline{\cos \beta = \cos b \,.\, \sin \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8),}$$

a slično

$$\underline{\cos \gamma = \cos c \,.\, \sin \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9).}$$

Napokon imamo za a, β i γ iz formule 6) $\operatorname{cotg} \beta = \dfrac{\sin c}{\operatorname{tg} b}$, a onda

$$\frac{RQ}{RS} \cdot \frac{1}{QC_0} = \operatorname{cotg} \beta, \quad \frac{QC_2}{RQ} = \operatorname{cotg} \gamma, \quad \frac{1}{RS} = \cos a, \text{ dakle}$$

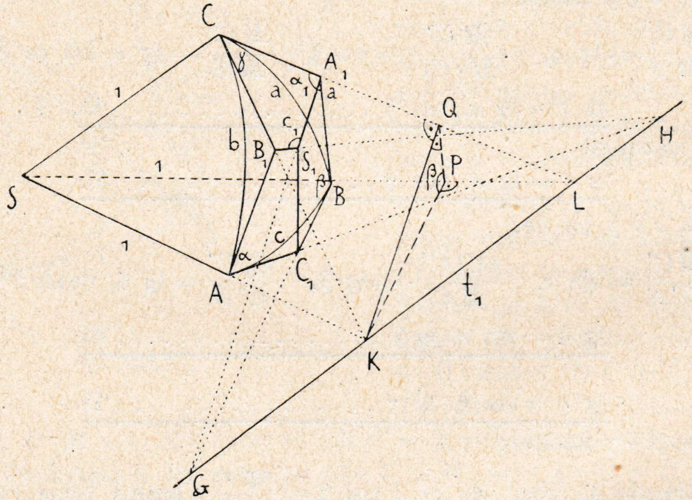
$$\underline{\cos a = \operatorname{cotg} \beta \,.\, \operatorname{cotg} \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots 10).}$$

Time je izvedeno svih deset formula za pravokutni trokut.

*

139. Kosokutni sferni trokut i općeni trobrid. Polarni trobridi. U slici 254. prikazan je koso trobrid, kojemu je vrh S. Iz vrha opisana kugla s polumjerom 1 siječe pobočke trobrida u stranicama sfernoga kosokutnoga trokuta ABC; veličine stranica zadane su s a, b, c, a kutovi su toga trokuta α, β, γ.

U vrhu C položit ćemo obje tangente na stranice trokuta; te tangente zatvaraju kut γ, jer stoje normalno na bridu SC. Tangenta CB_1 i brid SA sijeku se u točki K, jer je ta tangenta u pobočki CSA trobrida. Isto tako daje tangenta CA_1 s bridom SB sjecište L. Ravnina CKL ima na pobočki ASB trag $KL \equiv t_1$. Obje tangente u A na stranice sfernoga trokuta određuju ravninu, koja je normalna na pobočki ASB; njezin trag AC_1 siječe t_1 u točki H. Napokon je tangentama u točki B određena treća ra-



Sl. 254.

vnina, koja je opet normalna na ASB; njezin trag BC_1 siječe t_1 u točki G. Položene tri ravnine, koje su ujedno dodirne ravnine opisane kugle u točkama A, B, C, sijeku se u točki S_1, koja će biti na spojnicama $B_1 H$ i $A_1 G$; napokon će $S_1 C_1$ biti normalan pravac na ASB.

Oko točke S_1 postaje nov trobrid, koji ima bridove $S_1 A_1 \perp BSC$, $S_1 B_1 \perp ASC$ i $S_1 C_1 \perp ASB$. Prema tome je $S_1 (A B_1 C_1)$ polarni trobrid za $S(ABC)$. Stranice ćemo polarnoga trobrida obilježiti s a_1, b_1, c_1, a kutove s $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Iz slike izlazi, da će u četverokutu $S_1 A_1 C B_1$ biti

$$\gamma + c_1 = 180^0, \text{ a slično je } \alpha + a_1 = \beta + b_1 = 180^0.$$

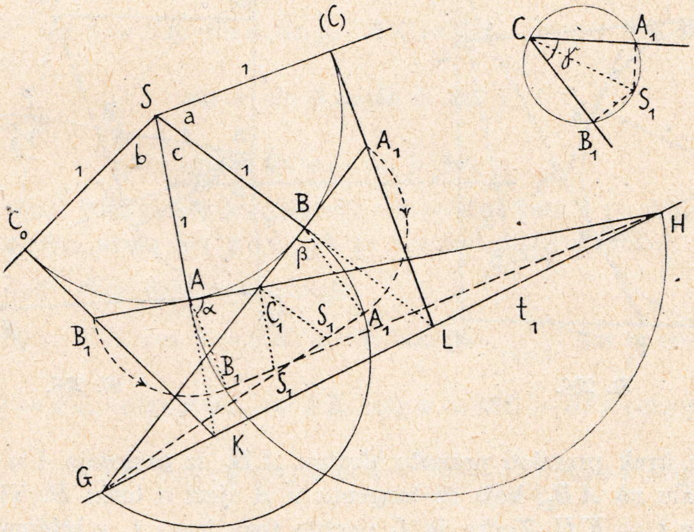
Iz četverokuta pak $S B A_1 C$ izlazi

$$a + \alpha_1 = 180^0, \text{ a slično je } b + \beta_1 = c + \gamma_1 = 180^0.$$

1. Razriješit ćemo crtnjom trobrid (ili sferni trokut), ako su zadana tri bridna kuta (stranice sfernoga trokuta) a, b i c. Odredit treba dakle α, β i γ (slika 255.).

Zadane ćemo kutove a, b, c razastrti u ravninu kuta c, koja je ujedno ravnina crtnje oko vrha S, a onda iz S opisati polumjerom 1 dio kružnice; lukovi te kružnice u pojedinim zadanim kutovima jesu preložene stranice sfernoga trokuta $A B C$.

Točke, označene u sl. 254. s K i L, dobit će se ovdje kao sjecišta za dva para pravaca, i to: tangenta u C_0 na luk u preložaju i brid SA daju sjecište K, a tangenta u (C) na luk u preložaju i brid SB daju sjecište L; prema tome je određen trag t_1.



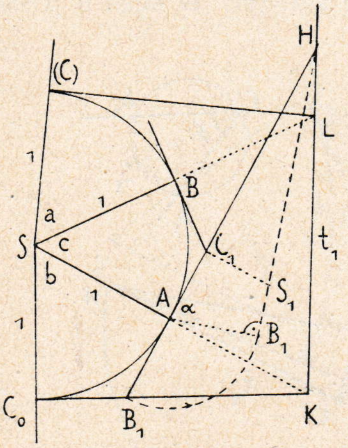
Sl. 255.

Tangenta u A na luk AB siječe t_1 u H, a tangentu $C_0 K$ u B_1: tangenta pak u B na luk BA siječe t_1 u G, a tangentu $(C) L$ u A_1. Tako dobivene točke A_1 i B_1 jesu preložaji točaka A_1 i B_1 (gl. sl. 254.) oko SB i SA u ravninu crtnje. Budući da je u prostoru $\sphericalangle A B_1 H = 90^0$, opisat ćemo nad AH kao dijametrom polukružnicu i odrediti na njoj tetivu $A B_1$, koja je poznata iz preložaja; kut $B_1 A H$ traženi je kut α. Posve sličnim načinom dobiva se kut $A_1 B G = \beta$. Napokon će se kut γ dobiti ovako· Iz sl. 254. izlazi, da je $S_1 A = S_1 B = S_1 C$, jer su to dužine za tri tangente

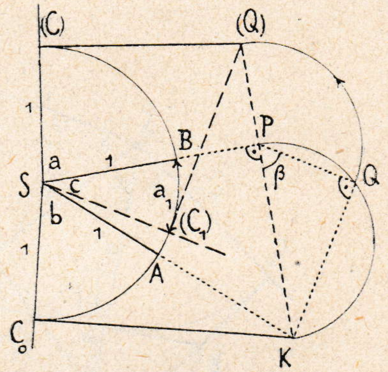
na istu kuglu iz točke S_1. Iz konstrukcije u sl. 255. dobit će se oba četverokuta $AC_1 S_1 B_1$ i $BA_1 S_1 C_1$, ako se u C_1 postave normale na AH i BG i odrede njihova sjecišta S_1 s $B_1 H$ i $A_1 G$. Pomenuta su dva četverokuta preložaji istoimenih četverokuta iz sl. 254. u ravninu crtnje. Učinit ćemo dakle na strani $CS_1 = AS_1$ (ili BS_1), preko dijametra CS_1 opisati kružnicu i prenijeti iz sl. 255. kao tetive $S_1 A_1$ i $S_1 B_1$. Kut je $A_1 C B_1$ traženi kut γ.

2. Gotovo isti postupak možemo upotrebiti, ako je od trobrida zadano α, b, c, a traži se a, β, γ (slika 256.).

Kutove b i c razastrijet ćemo u ravninu crtnje, opisati kružnicu $C_0 AB$ i opet kao i prije odrediti točku K. U A ćemo položiti tangentu na luk AB, koja će $C_0 K$ sjeći u B_1. Na tangentu ćemo u A prenijeti zadani kut α,



Sl. 256.



Sl. 257.

na njegov krak prenijeti poznatu dužinu AB_1 iz preložaja i u B_1 postaviti normalu na AB_1, koja će tangentu u A sjeći u točki H. Time je određen trag $t_1 \equiv KH$. Točka je L sjecište toga traga t_1 s bridom SB. Povuče li se iz L tangenta na kružnicu, dobit će se točka (C), a tim je određen kut a. Tako je dalje rješenje svedeno na pređašnji zadatak.

3. U sliku 254. unijet ćemo trokut KPQ. Iz K ćemo spustiti normalu KP na SL (ujedno je $KP \parallel GB$), a onda iz K normalu KQ na CL (bit će dakle $KQ \parallel GA_1$). Budući da je $GA_1 \perp CSB$, stojat će i KQ na toj ravnini normalno; poradi toga je opet $\sphericalangle KQP = 90^0$, $QP \perp SL$, jer je $QP \parallel A_1 B$, a napokon $\sphericalangle QPK = \beta$.

Ako je za sferni trokut zadano b, c i β, a traži se a, α i γ, razastrijet ćemo (slika 257.) b i c u ravninu crtnje, oko S opisati kružnicu BAC_0 polumjerom 1 i odrediti točku K istim načinom, kao i prije. Povući ćemo

dalje točkom K normalu KP na SB u suglasju sa slikom 254. i odrediti pravokutni trokut PQK, koji ima kod P zadani kut β. Zamislimo još nepoznati bridni kut a trobrida preložen oko SB u ravninu crtnje, doći će Q u (Q). Budući da je Q u prostoru na tangenti stranice BC sfernoga trokuta, i to u vrhu C, povući ćemo iz (Q) tangentu na položenu kružnicu; dirałište je točka (C), a traženi je kut $a = BS(C)$. Budući da se iz (Q) mogu na kružnicu povući dvije tangente, dobit će se u rješenju i kut $a_1 = BSC_1$; to rješenje vrijedi samo onda, ako je (C_1) s točkom (Q) na istoj strani pravca SB.

Tim je ovaj treći slučaj za razrješenje trobrida sveden opet na prvi slučaj. Ostala tri moguća slučaja, gdje su zadane veličine α, β, γ, dotično a, β, γ ili pak a, α, γ, razriješit će s pomoću polarnoga trobrida posve istim načinom.

4. Iz slike 257. i 254. izlaze ove relacije:

$KQ = KP . \sin\beta = SK . \sin c . \sin\beta$, $KQ = CK . \sin\gamma = SK . \sin b . \sin\gamma$;

bit će dakle

$$\sin c . \sin\beta = \sin b . \sin\gamma$$

ili

$$\underline{\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma}.$$

a slično vrijedi i za ostale kombinacije od po dva kuta i po dvije stranice. Time je izveden s i n u s o v p o u č a k za kosokutni sferni trokut.

Iste dvije slike daju ove relacije:

$$PQ = KP . \cos\beta = SK . \sin c . \cos\beta = \frac{1}{\cos b} . \sin c . \cos\beta$$

$$PQ = PL . \operatorname{cotg}(PQL) = PL . \operatorname{cotg} a = (SL - SP) . \operatorname{cotg} a =$$

$$\left(\frac{1}{\cos a} - SK . \cos c\right) \operatorname{cotg} a = \left(\frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos b} \cos c\right) \operatorname{cotg} a.$$

Izlazi dakle:

$$\frac{\sin c . \cos\beta}{\cos b} = \left(\frac{1}{\cos a} - \frac{\cos c}{\cos b}\right) \operatorname{cotg} a,$$

ili, ako se obje strane pomnože sa $\sin a . \cos b$:

$$\underline{\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta}.$$

To je pak k o s i n u s o v p o u č a k za s t r a n i c u kosokutnoga sfernoga trokuta.

Iz polarnoga trobrida izlazi k o s i n u s o v p o u č a k za k u t:

$$\underline{\cos\beta = -\cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \cos b}.$$

Zadaci za vježbu.

425.) Prikaži trobrid s pripadnim sfernim trokutom u kotiranoj projekciji na jednu pobočku trobrida. Dvije će se stranice sfernoga trokuta prikazati kao lukovi elipsâ. Upotrebi u tu svrhu afinitet za preložaje i projekcije pojedinih točaka i pripadnih tangenata na stranicama sfernoga trokuta.

Odredi kotiranu projekciju jedne stranice sfernoga trokuta tako, da tražiš izravno presjek polukugle ravninom.

426.) Razriješi trobrid onim načinom, kao što je u sl. 253. pokazano za pravokutni trobrid, ako je poznat plošni kut β i oba bridna kuta a i c. Okreći pobočku a oko kraka kuta c u prostor, dok priklon te pobočke prema ravnini kuta c bude β. Nađi zatim bridni kut b.

427.) Razriješi kosokutni trobrid kao u zadatku 426., ako je zadano c, α i β.

Položi jednim krakom kuta c ravninu, koja s ravninom toga kuta čini priklon α; drugim krakom kuta c položi ravninu, koja ima priklon β. Odredi presječnicu tih dviju ravnina.

Treći dio.

Prvi odsjek.

Centralno projiciranje (perspektiva).

I. Linearna perspektiva uopće.

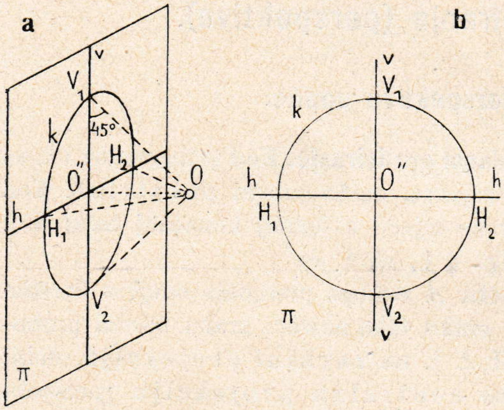
140. Općene pripomene o centralnom projiciranju. Kod ortogonalne i kose projekcije sve su zrake, kojima se projicira, među sobom paralelne. Kod „centralnoga“ se projiciranja sve zrake stječu u jednoj konačnoj točki, t. j. u središtu (centru) projiciranja (gl. § I., sl. 1. *c*).

Zamislimo li, da se svaka točka A nekoga predmeta spoji s čvrstim središtem projiciranja, pa se za svaku tako nastalu zraku odredi probodište A_s na nekoj čvrstoj ravnini Π, t. j. na ravnini projekcijâ, dobit ćemo skup svih točaka A_s, koje čine centralnu projekciju (perspektivnu sliku) zadanoga predmeta. Centralne projekcije točaka označit ćemo kazalom $_c$ ili $_s$.

Presiječemo li piramidu, kojoj je osnovka ABC, ravninom Π, pa presječni trokut obilježimo s $A_s B_s C_s$, možemo vrh S piramide držati središtem centralnoga projiciranja, a ravninu Π ravninom projekcijâ. Trokut je onda $A_s B_s C_s$ centralna projekcija trokuta ABC. Ako se radi o centralnom projiciranju kružnice ili kugle, dolazi namjesto pređašnje piramide stožac, za koji je zadana kružnica osnovka, ili koji je kugli opisan.

Centralno se projiciranje dijeli u dvije glavne grupe. U jednoj se grupi uzima, da je središte projiciranja oko *(O)*, a u drugoj je grupi središte projiciranja matematička točka *(S)*. Za središte O mogu doći u obzir samo oni dijelovi prostora, koji se nalaze pred nama, i koje možemo mirnim okom pregledati. Sve vidne zrake stječu se u središtu vidne leće tako, da

je to središte ujedno središte projiciranja O. Za mirni se položaj oka mogu iz O projicirati sve one točke, koje su u t. zv. produženom vidnom stošcu, t. j. u onom, za koji je O vrh, a očna zenica osnovka. Ovakovo se projiciranje, koje je prostorno ograničeno, zove obično p e r s p e k t i v a. Slike, kojima nam se u gledanju prikazuju predmeti pred nama, jesu dakle perspektivne slike. Fizičkom gledanju okom možemo podati i više čisti geometrijski oblik. Tako su fotografske slike p e r s p e k t i v e predmetâ, za koje je središte projiciranja središte objektiva u fotografskoj spravi. Kad bismo u to središte stavili oko, vidjeli bismo, gledajući predmet, isto takovu perspektivnu sliku, kao što je prikazuje fotografska slika, samo će u veličini obadviju slikâ biti razlika. Kad se p e r s p e k t i v n e slike predmetâ izvode geometrijskim crtanjem (a ne gledanjem ili fotografiranjem), onda se to čini redovno na temelju dviju normalnih projekcija tih predmeta. Konstrukcija takvih perspektivnih slika označuje se obično imenom l i n e a r n a p e r s p e k t i v a. Perspektivne slike građevina obično se izvode tim načinom.



Sl. 258.

Središte centralnoga projiciranja može biti i m a t e m a t i č k a t o č k a S. Time, što S nije više oko, mogu se centralnom projiciranju privesti s v e točke prostora, i one, koje su iza središta S; o „vidnom stošcu“, koji omeđuje prostor, nema dakle ovdje govora. Takva se centralna projekcija zove s l o b o d n a p e r s p e k t i v a ili općena centralna projekcija; ona je matematičko posveopćenje specijalnoga procesa, t. j. „perspektive“. U slobodnoj se perspektivi ne polazi od normalnih projekcija predmeta i tvorevina, nego se iz definiranih položaja tih tvorevina (prema ravnini projekcijâ Π i prema središtu S) izvode centralne projekcije potrebnim matematičkim metodama.

Ovdje ćemo se najprije baviti „linearnom perspektivom“.

141. Ravnina slike Π i njezini osobiti elementi. Neka bude zadana vertikalna ravnina slike Π i središte projiciranja (oko) O (s l i k a 258.). Normalna projekcija središta O na Π neka bude označena s O'' i to zato, jer ćemo ravninu Π uzimati najčešće u ravnini Π_2, na koju su normalne projekcije obilježene znakom ″. Točka se O'' zove g l a v n a t o č k a.

Položimo li okom O horizontalnu ravninu, sjeći će ona Π u pravcu h, koji ide glavnom točkom O''. Pravac se h zove ukratko h o r i z o n t. Normala

v, postavljena u O'' na h, zove se vertikala. Obadva su pravca v i h za linearnu perspektivu znatna u konstrukcijama.

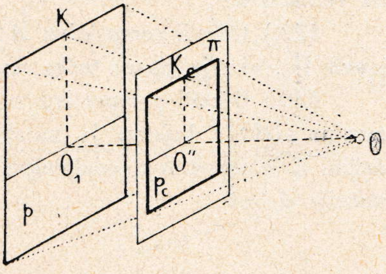
Daljina oka od ravnine slike, dakle dužina OO'', zove se udaljenost ili distancija za perspektivu. Oblik perspektive zavisi bitno o distanciji; da se u ravnini slike Π naznači, kolika je distancija, opisat će se iz glavne točke O'' kružnica k polumjerom, koji je jednak OO''; kružnica se k zove kružnica distancije.

Kružnica k siječe h u točkama H_1 i H_2, a v u točkama V_1 i V_2. Te se točke u perspektivnim konstrukcijama mnogo upotrebljavaju; nazivaju se obično točkama distancije na horizontali i vertikali.

Središte O i kružnica k određuju uspravni stožac, kojemu su izvodnice priklonjene pod 45^0 prema ravnini slike.

U sl. 258. položena je na desno ravnina slike Π zajedno s osobitim svojim navedenim elementima u ravnini crtnje.

O tome, kolika treba da bude distancija, odlučuje veličina predmeta, koji se prikazuje perspektivno. Što se više predmet proteže u visinu i širinu, treba da i distancija bude to veća, jer će se samo tako moći cijeli predmet potpuno jasno uočiti. Obično se uzima, da je distancija $1^1/_2$—2 puta tolika, kolika je najveća dimenzija perspektivne slike nekoga predmeta (slika 259.); prema tome je udaljenost oka od predmeta samoga opet $1^1/_2$—2 puta tolika, kolika je pripadna dimenzija predmeta. Iz slike 259. izlazi naime, ako je p predmet, a p_c njegova perspektiva na Π:



Sl. 259.

$$OO'' : O''K_c = OO_1 : O_1K.$$

Bilješka. Da nam se neka umjetnina (perspektivna slika) što vjernije prikaže, treba oko od slike odmaknuti za toliko, OO'', koliko je sprijeda naznačeno, pretpostavljajući, da je umjetnik i sam pazio na to pravilo kod izrađivanja te prema njemu udesio udaljenost OO_1.

142. Perspektiva točke iz njezinih normalnih projekcija. Zadana je (slika 260. a i b) točka P sa svojim normalnim projekcijama P', P'' na Π_1 i Π_2. Ravnina Π perspektivne slike neka je identična s nacrtom, t. j. $\Pi_2 = \Pi$, a oko je O određeno opet svojim normalnim projekcijama O' i O''.

Perspektivna će slika P_c točke P na Π biti probodište spojnice OP s ravninom Π. Zamislimo položenu ravninu točkom O i pravcem PP'; njezin će prvi trag biti $1\,O'$, a drugi je trag pravac, postavljen u 1 normalno na x. Položimo dalje ravninu točkom O i pravcem PP''; njezin će drugi trag biti spojnica $O''P''$. Obje se ravnine sijeku u pravcu OPP_c, za

koji je nacrtno probodište P_c tražena perspektiva. Točka je dakle P_c presjek traga $O''P''$ s tragom $1P_c \perp x$. Kad su dakle poznate obje normalne projekcije nekoga predmeta, moći će se tim postupkom odrediti perspektivne slike pojedinih njegovih točaka (isp. sl. 267.).

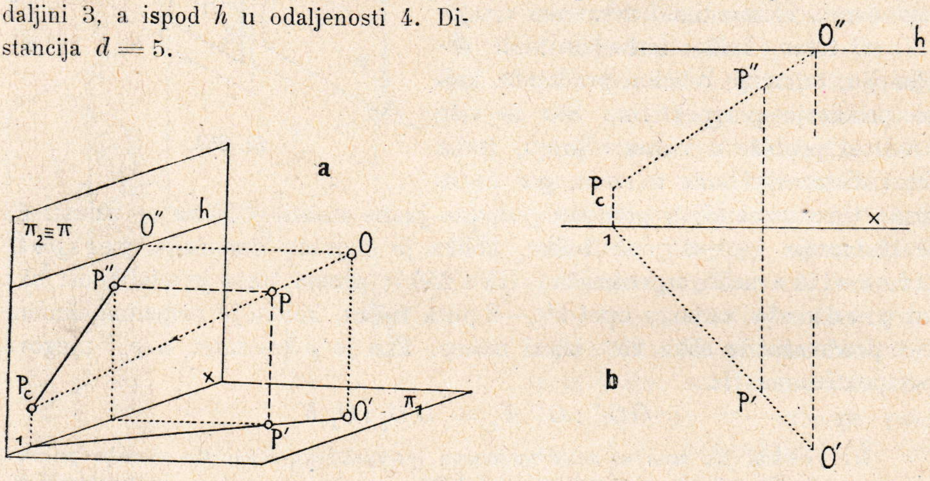
Iz određenja perspektivne slike P_c točke P izlazi, da će perspektiva svake točke Q, koja je u ravnini slike Π, biti u toj istoj točki, t. j. bit će $Q_c \equiv Q''$.

Zadaci za vježbu.

428.) Gdje se nalazi točka M, kojoj je perspektiva M_c na horizontu h ili na vertikali v?

429.) Odredi perspektivu $A_c B_c$ prušca AB, koji je koso položen pred Π_2 i nad Π_1, ako je glavna točka između ordinalâ za A'' i B'', a distancija $d = 5$.

430.) Odredi perspektivu nekoga horizontalnoga prušca CD, koji je ispod ravnine (Oh) i kojemu je nacrtno probodište P_2 na lijevo od glavne točke u daljini 3, a ispod h u odaljenosti 4. Distancija $d = 5$.



Sl. 260.

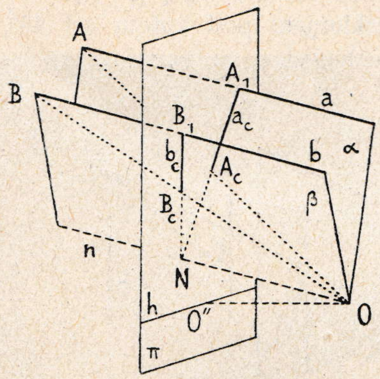
431.) Nacrtaj perspektivnu sliku prušca EF, koji je normalan na Π_2; točka je E u Π_2, a F ima od Π_2 daljinu 3. Nacrtaj i perspektivu prušca $EG \perp \Pi_2$, kojemu je prijašnja točka E nožište, a G je iza ravnine slike u daljini 3.

432.) Nacrtaj perspektivnu sliku pravokutnika, kojemu je ravnina okomita na Π_1, a jedna njegova dijagonala vertikalna. Horizont h položi sjecištem dijagonalâ u drugoj projekciji. Distancija $d = 5$.

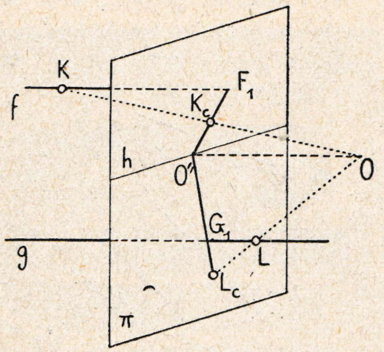
143. Perspektive paralelnih pravaca. Nedogled. U slici 261. izabrana su dva paralelna pravca a i b u kosom položaju prema ravnini slike; njihova su probodišta na Π točke A_1 i B_1. Izaberemo li na a kojugod

točku A, povučemo OA i odredimo probodište A_c ove spojnice s ravninom Π, bit će $A_1 A_c$ perspektiva prušca $A_1 A$. Isto ćemo tako dobiti perspektivu $B_1 B_c$ prušca $B_1 B$ na b.

Perspektiva se pravca a može dobiti i tako, da se okom O i pravcem a položi ravnina α, koja Π siječe u perspektivi a_c. Isto tako izlazi b_c kao presječnica ravnine Π s ravninom $\beta \equiv Ob$.



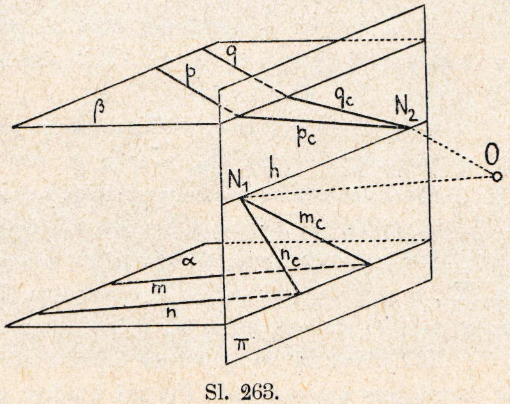
Sl. 261.



Sl. 262.

Ravnine α i β sijeku se u pravcu n, koji je paralelan s a i b (§ 4., 9). Prema tome će se perspektive a_c i b_c sjeći u točki N, koja se dobiva, ako se okom O povuče paralela n s a i b i odredi njezino probodište s Π. Perspektive svih pravaca, koji su s a i b paralelni, prolazit će istom točkom N, koja se zove nedogled tih paralelnih pravaca. Pravac ON zove se nedogledna zraka.

Ako su pravci normalni na Π, bit će njihov nedogled u glavnoj točki O'' (slika 262.). Na pravcu je f izabrana točka K iza ravnine slike; perspektiva K_c bit će između nedogleda O'' i nožišta F_1. Na pravcu $g \perp \Pi$ uzeta je točka L pred ravninom slike; perspektiva L_c bit će izvan prušca, koji određuje nedogled O'' i nožište G_1.



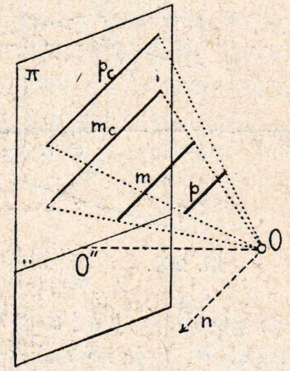
Sl. 263.

Svi paralelni pravci, koji su ujedno horizontalni kao $m \parallel n$ u ravnini α (slika 263.), ili $p \parallel q$ u ravnini β, imaju svoje nedoglede N_1, dotično N_2, na horizontu h. Nedogledne su zrake ON_1 i ON_2 horizontalni pravci.

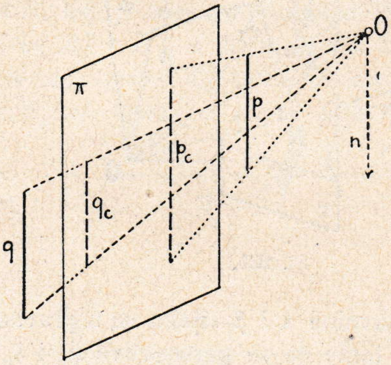
Pravci, koji su paralelni i ujedno paralelni s ravninom slike, kao m i p u slici 264., imaju paralelne centralne projekcije $m_c \parallel p_c$, jer je nedogledna zraka n paralelna s Π.

Vertikalni pravci p, q (slika 265.) imaju vertikalne perspektive; te su dakle perspektive sve paralelne među sobom. Perspektiva p_c vertikalnoga prušca p, koji je pred ravninom slike Π, bit će veća, $p_c > p$; perspektiva je naprotiv nekoga prušca q, koji je iza ravnine slike, manja, $q_c < q$.

Paralelni pravci, koji su prema Π priklonjeni pod kutom od 45^0, imaju nedoglede na kružnici k distancije; nedogledne su naime zrake izvodnice stošca O, k (gl. sl. 258.).



Sl. 264.



Sl. 265.

Zadaci za vježbu.

433.) Odredi perspektivne slike za paralelne pravce, koji su zadani normalnim projekcijama, i to: a) $a \parallel b$ u kosom položaju; b) $f \parallel g \perp \Pi_2$; c) $m \parallel p \parallel \Pi_2$; d) $p \parallel q \perp \Pi_1$; e) $r \parallel s \parallel \Pi_1$.

434.) Prikaži iz normalnih projekcija perspektivnu sliku pravokutnika, kojemu je ravnina normalna na Π_2, a dvije su mu stranice paralelne s Π_2.

435.) Odredi normalne projekcije nekoga prušca, koji s Π_2 čini priklon od 45^0, pa prikaži taj pružac u perspektivi. Gdje će biti nedogled?

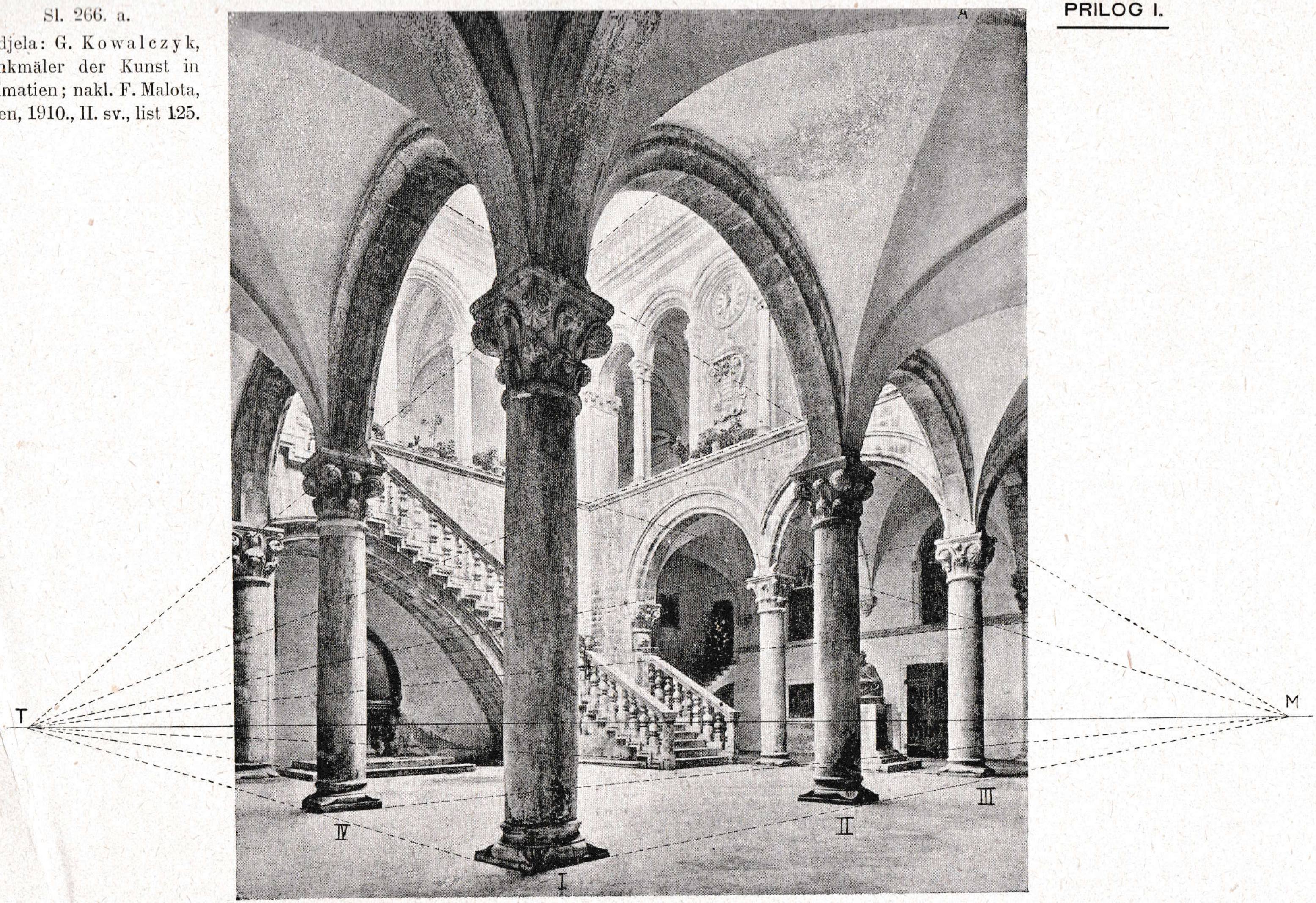
436.) Prikaži perspektivnu sliku pravilnoga šesterokuta, koji je u ravnini $\tau \parallel \Pi_1$, a zadan je normalnim projekcijama. Dvije i dvije paralelne stranice šesterokuta imat će nedoglede na h.

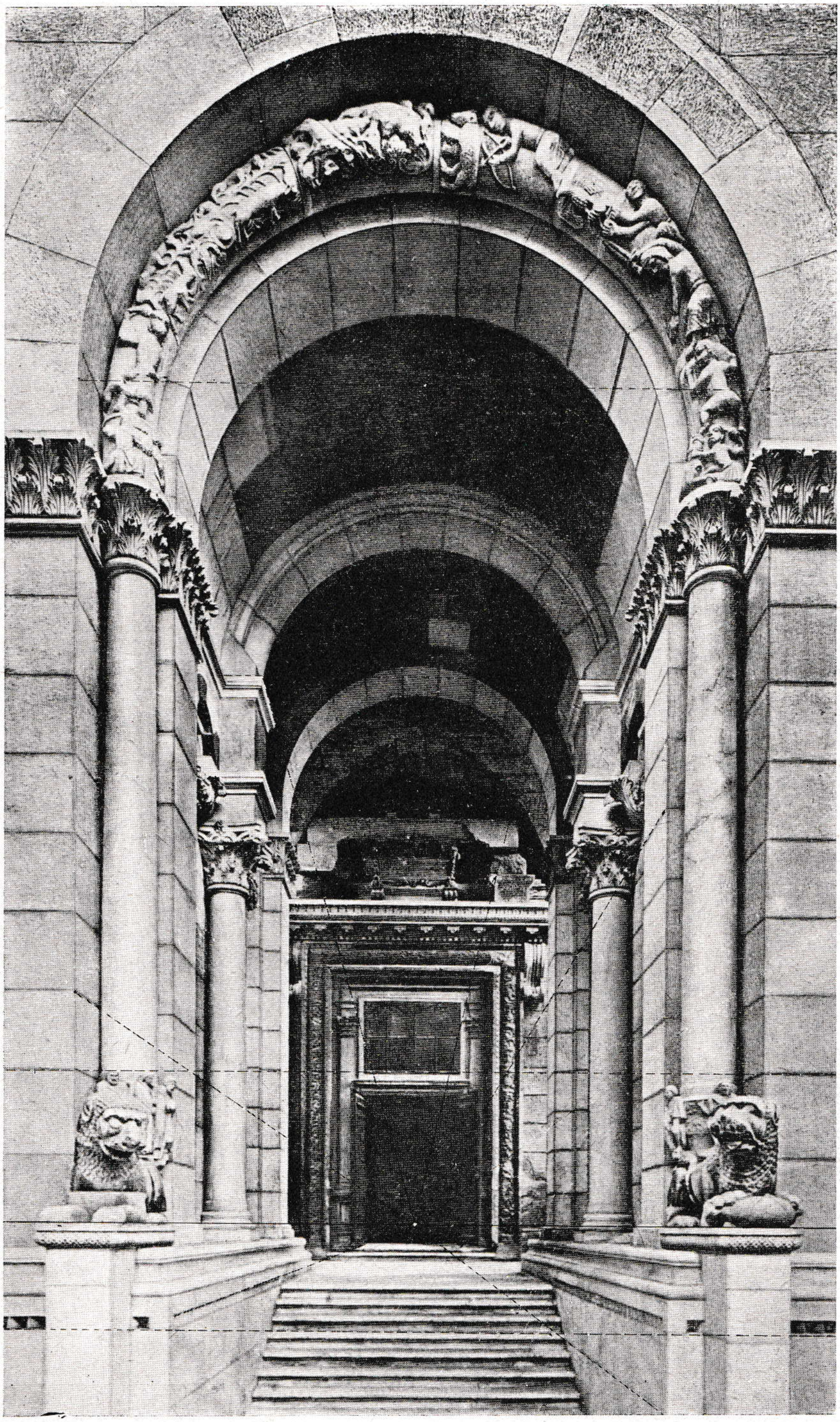
437.) Nacrtaj perspektivnu sliku kvadrata, koji je paralelan s Π_2, a zadan je normalnim projekcijama. Postavi kvadrat pred Π_2, a onda iza Π_2. Što se može reći za te perspektive i za kvadrat u prostoru?

438.) Postavi pred Π_2 vertikalni pružac MN tako, da bude $M_cN_c = 2 . MN$, ako je središte O zadano.

Sl. 266. a.

Iz djela: G. Kowalczyk, Denkmäler der Kunst in Dalmatien; nakl. F. Malota, Wien, 1910., II. sv., list 125.





Sl. 266. b.

Iz djela: G. Kowalczyk, Denkmäler der Kunst in Dalmatien; nakl. F. Malota, Wien, 1910., I. sv., list 23.

439.) Uzmi u Π_1 više paralelnih pravaca, koji čine s x kut $\beta = 60^0$. Prikaži perspektivne slike tih pravaca, ako je zadano oko O (2, 2·5, 4), dakle distancija $d = 2·5$.

440.) Nacrtaj perspektivnu sliku pravokutnika, kojemu je kraća stranica u Π_1, a duža u Π_2, pa koji je prema Π_2 priklonjen pod kutom $\beta = 45^0$.

144. Primjeri za nedoglede na fotografskoj slici. U slici 266.a prikazana je perspektivna slika (fotografija), na kojoj su naknadno određeni nedogledi M i T za dva smjera paralelnih pravaca. Glavna je točka nešto desno od stupa označena s I. Pravac, koji spaja podnoške stupova I, II i III, položen je koso prema ravnini slike, isto je tako kos pravac, koji spaja podnoške stupova I i IV. Oba ta pravca čine pravi kut kod stupa I. Prvi pravac zatvara s ravninom slike nešto manji kut negoli drugi pravac. Kružni lukovi nad stupovima prikazuju se perspektivno kao elipse. Dvije valjkaste površine na svodu (desno) sijeku se u prodornoj crti, koja je sastavljena od dvije grane; obje se grane sijeku u točki A (isp. zad. 378.). Bridovi na zaglavcima stupova I i IV nijesu u naravi točni. Zaglavak stupa II nešto je niži od zaglavaka na I i III.

Građevina na slici 266.b ima pročelje paralelno s ravninom slike. Svi pravci, koji na pročelju stoje normalno, imaju zajednički nedogled u glavnoj točki. Ta je točka u sredini ulaza, blizu praga. Kružni su lukovi svoda paralelni s ravninom slike, zato se i u perspektivi prikazuju opet kao različno veliki kružni lukovi. Bridovi na stubama, koje su paralelne s ravninom slike, imaju perspektive paralelne s horizontom.

Vertikalni pravci (stupovi, bridovi) ostaju i u perspektivi vertikalni. Ako se pravci, koji su u prostoru vertikalni, među sobom u višini približavaju na fotografiji, znak je, da fotografska ploča nije bila vertikalna nego nagnuta.

Bilješka. Slika 266.a predočuje predvorje rektorske (vladalačke) palače u Dubrovniku (iz 15. vijeka). Gradnja je izvedena u slogu talijanske kasnije renesanse; od velikoga je potresa g. 1667. ostala od česti poštеđena.

Slika 266.b predočuje ulaz u mauzolej (sadašnju stolnu crkvu) Dioklecijanove palače u Splitu, sagrađene u 4. vijeku.

Obje slike pokazuju vanredno lijepe arhitektonske oblike (zaglavke stupova i dr.).

145. Upotrebe za metodu linearne perspektive. U slici 267. predočene su obje ortogonalne projekcije predmeta, koji je koso prikazan u sl. 160., samo je u sl. 267. taj predmet postavljen nagnuto prema Π_2. Ravnina je Π_2 ujedno ravnina slike za perspektivu.

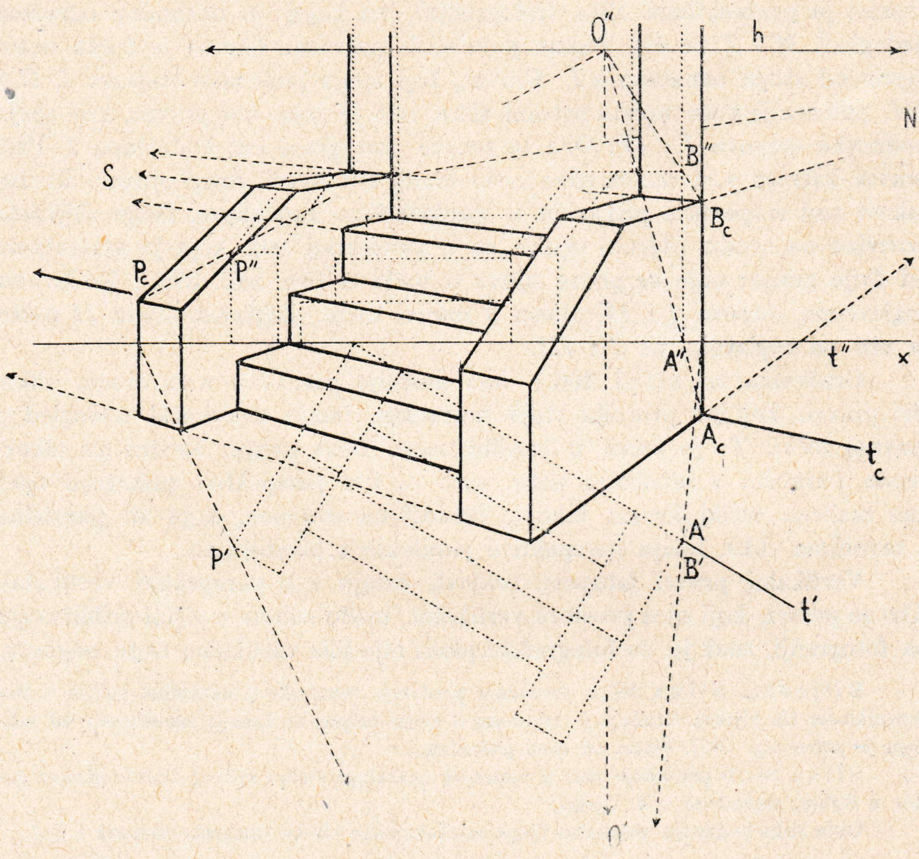
Postupkom, koji je istumačen u § **142.**, određene su ovdje perspektivne slike pojedinih točaka. Točka A', A'' daje perspektivu A_c, koja nije drugo nego nacrtno probodište za pravac OA, i t. d.

Postavimo li oko pred ravninu crtnje nad točku O'' u daljini, koja je jednaka udaljenosti projekcije O' od osi x (distancija), dobit ćemo potpun

prostorni utisak predmeta. Budući da je predmet pred ravninom slike Π_2, njegova je perspektivna slika većih dimenzija (isp. § **143.**).

Vrijedno je usporediti kosu i perspektivnu sliku istoga predmeta (sl. 160. i 267.); lako će se razabrati prednosti jedne i druge projekcije.

Metoda linearne perspektive prikazana je u slici 268. za slučaj, kad ravnina σ perspektivne slike nije identična s Π_2, nego je samo $\sigma \perp \Pi_1$. I tu

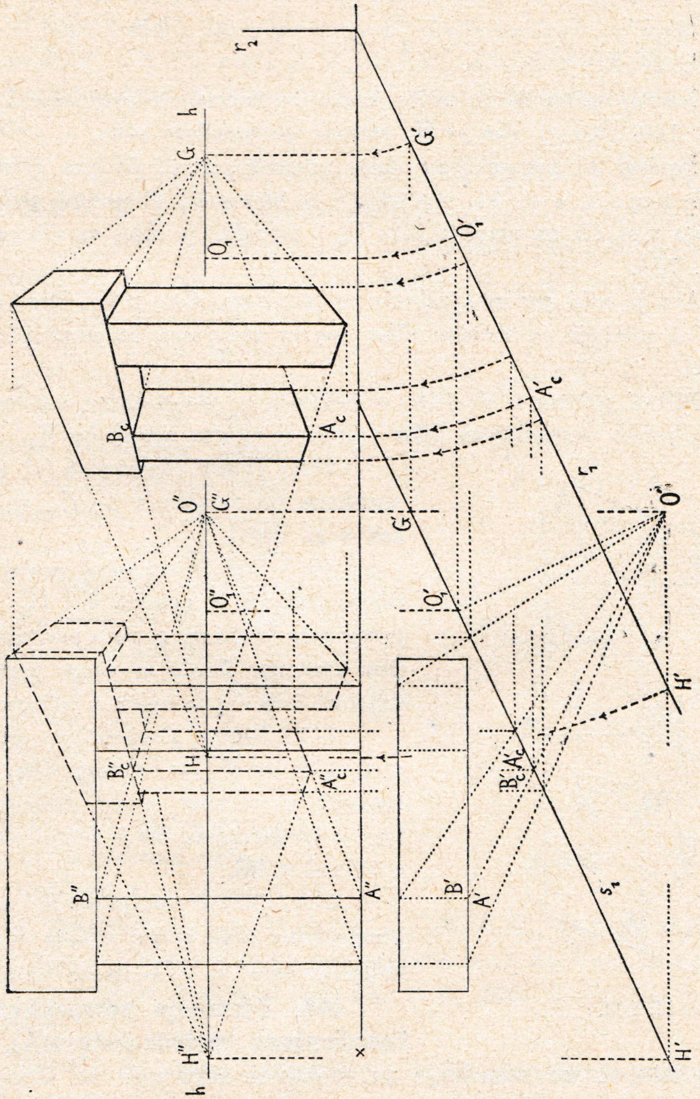


Sl. 267.

će se postupati tako, da se za neku točku, od koje su poznate obje normalne projekcije A', A'', povuče pravac $O'A'$, $O''A''$, i odredi njegovo probodište A'_c, A''_c s ravninom slike σ. Budući da je ravnina σ priklonjena prema Π_2 (prvi trag s_1), ne će se perspektiva predmeta, koja je u ravnini σ, prikazati u Π_2 u pravom obliku. Zato će se σ pomaknuti paralelno desno u položaj ρ (prvi trag r_1) zajedno s određenim već točkama A'_c, B'_c, ... a onda će se ρ okrenuti oko r_2 zajedno s perspektivnom

slikom u Π_2; tako će se napokon dobiti točke A_c, B_c, ... prave perspektivne slike.

Predmet, koji je u slici 268. prikazan normalnim projekcijama, pokazuje dvije vrste bridova; jedni su paralelni s Π_2, drugi su normalni prema



Sl. 268.

Π_2. Prvi će bridovi imati na σ nedogled H', H'', koji se dobiva, ako se okom O položi paralelan pravac s tim bridovima i odredi njegovo probodište na σ. Drugi će bridovi imati nedogled G', G'' na σ. Budući da su i

jedni i drugi bridovi horizontalni, bit će nedogledi H i G na horizontu h (ujedno je $G'' \equiv O''$).

Predmet je u sl. 268. izabran iza ravnine slike σ, zato je njegova perspektiva na σ manjih dimenzija negoli predmet sâm.

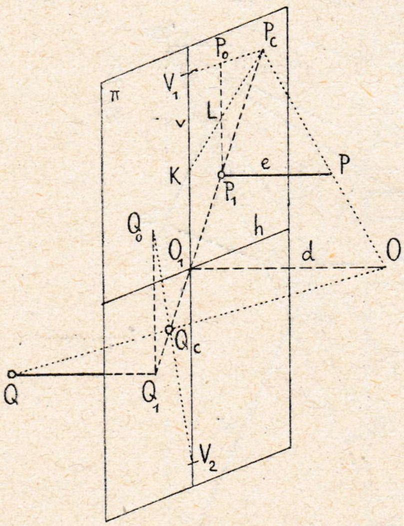
Zadaci za vježbu.

441.) Nacrtaj perspektivnu sliku kocke iz normalnih projekcija za općeni položaj u sl. 149. (desno), ako je Π_2 ravnina perspektivne slike.

442.) Predoči a) perspektivnu sliku predmeta u sl. 84. na onu ravninu slike, kojoj je trag ${}_2x_3$ u sl. 84. upotrebljen za stranocrt; b) nacrtaj perspektivnu sliku predmeta u sl. 72. na ravninu slike Π_2 i isporedi tu sliku sa slikom u kosoj projekciji (sl. 72.).

443.) Ako je neki predmet zajedno s ravninom slike nepomičan, a oko se O približava ili udaljuje od ravnine slike, što se može reći za perspektivnu sliku predmeta?

444.) Prikaži prizmu u sl. 124. u normalnim projekcijama zajedno sa sjenom, a onda odredi perspektivnu sliku prizme (i njezine sjene) na Π_2.



Sl. 269.

445.) Prikaži romboedar (sl. 159.) perspektivno na ravninu $\sigma \perp \Pi_1$ (postupkom kao u sl. 268.).

446.) Odredi normalne projekcije kvadrata, kojemu je ravnina $\delta \parallel \Pi_1$, i u koji je upisana kružnica, a onda nacrtaj perspektivu kvadrata. Kružnica će se perspektivno prikazati kao elipsa upisana četverokutu.

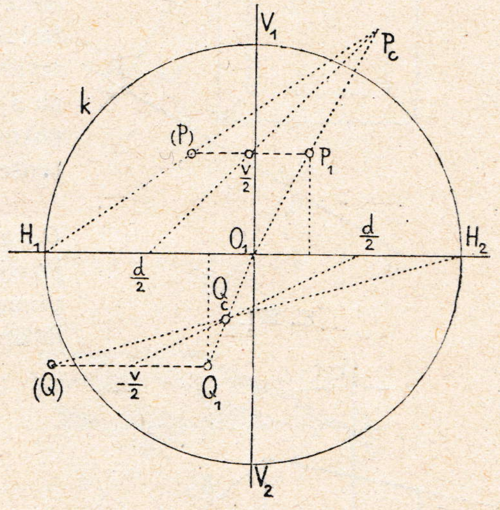
447.) Nacrtaj perspektivnu sliku tijela u sl. 176. na Π_2 kao ravninu slike, pa uzmi horizont u polovini visine donjega valjka. Isp. za konturu ono, što je rečeno za sl. 184. u bilješci § **88**.

448.) Odredi postupkom kao u sl. 267. perspektivnu sliku stupa zadana normalnim projekcijama u sl. 271. na ravninu Π_2.

146. Određenje perspektivne slike koordinatama (metoda distancijâ). Dosada istumačeni postupak za određenje perspektivne slike nije za konstrukciju zgodan onda, kad je daljina oka od ravnine slike tako velika, da na pr. prva projekcija O' oka pada izvan okvira crtanja. U takvom se slučaju upotrebljava t. zv. „metoda distancijâ“, koja je prikazana u slici 269.

Glavnom točkom O_1 nacrtan je na ravnini slike Π horizont h, povučena vertikala v i određene su točke distancije V_1 i V_2. Neka točka P prostora prikazana je svojom normalnom projekcijom P_1 na Π i daljinom $PP_1 = e$ od Π. Povuče li se OP i $O_1 P_1$, dobit će se u sjecištu perspektiva P_c točke P (isp. § **142.**). Do iste točke P_c može se doći i drugim načinom. Povuče li se $P_1 P_0 \parallel O_1 V_1$, učini $P_1 P_0 = PP_1$, a onda nacrta spojnica $V_1 P_0$, dobit će se u njezinu sjecištu s $O_1 P_1$ opet ista perspektiva P_c. Budući da je naime

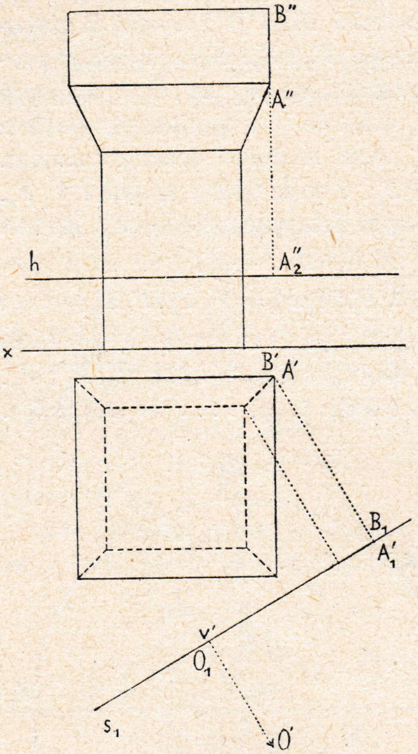
$O_1 V_1 = O O_1 = d$, $P_1 P_0 = PP_1 = e$, bit će $O_1 P_c : P_1 P_c = V_1 P_c : P_0 P_c = d : e$; obje su dužine $O_1 V_1$ i $P_1 P_0$ položene paralelno na istu stranu, pa će se zato dobiti V_1, P_0 i P_c na istome pravcu, baš tako kao i točke O_1, P_1, P_c. Ako je distancija d velika, može se upotrebiti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ te distancije. Učini li se na pr. u sl. 269. u ravnini Π $O_1 K = \frac{d}{2}$, a ujedno $P_1 L = \frac{1}{2} \cdot PP_1$, dat će spojnica KL na $O_1 P_1$ opet isto sjecište P_c (dijeljenje paralelnim transverzalama!). Ako je zadana točka Q iza ravnine slike, pa se upotrebi donja vertikalna točka distancije, V_2, morat će se učiniti $Q_1 Q_0 \parallel O_1 V_2$ tako, da su prušci $O_1 V_2$ i $Q_1 Q_0$ okrenuti na protivne strane. Perspektiva je Q_c sjecište pravaca $Q_0 V_2$ i $O_1 Q_1$. I tu se može upotrebiti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ distancije d i daljine QQ_1.



Sl. 270.

U slici 270. prikazan je taj postupak u ravnini crtnje, pa je tu upotrebljena jedna i druga točka distancije na horizontu, t. j. H_1 i H_2. Daljina PP_1 točke P od ravnine slike (crtnje) položena je paralelno s $O_1 H_1$ i na istu stranu, od P_1 do (P), a dalji je postupak isti kao u sl. 269. Točka je Q opet iza ravnine crtnje.

Kod metode distancijâ potrebno je dakle poznavanje normalne projekcije (P_1) zadane točke P na Π, a onda daljina PP_1 od ravnine Π. Normalna je pak projekcija P_1 određena svojim daljinama od horizonta h (i od vertikale v). Te su dvije udaljenosti jednake udaljenostima točke P od horizontalne ravnine Oh i od vertikalne ravnine Ov. Za metodu distancijâ potrebno je dakle poznavanje daljinâ točke P od triju među sobom normalnih

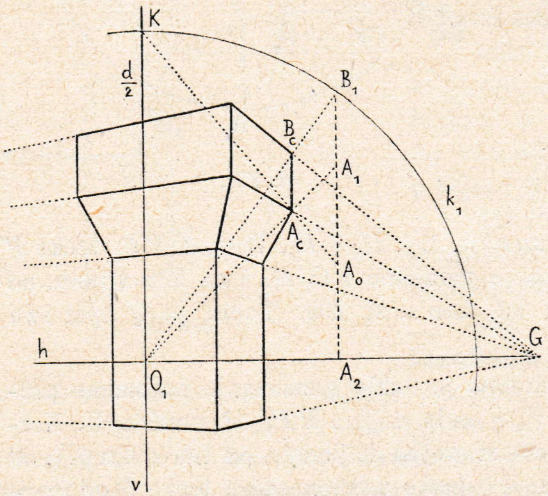


Sl. 271.

ravnina: Oh, Ov i Π. Takve se tri daljine zovu prostorne koordinate točke P.

Čim je zadana prva i druga ortogonalna projekcija točke P, a određena je ravnina Π perspektivne slike, mogu se odmjeriti sve tri koordinate točke P i upotrebiti za metodu distancijâ. Taj je način upotrebljen u slici 272. za predmet zadan svojim normalnim projekcijama na Π_1 i Π_2 u slici 271. Projekcija točke A na ravninu slike $\sigma \perp \Pi_1$ označena je ovdje s A_1. Visina je točke A nad horizontalnom ravninom Oh jednaka dužini $A''A''_2$. Daljina točke A od vertikalne ravnine Ov mjeri se udaljenošću $A'_1 O_1$ na s_1 (t. j. na tragu ravnine slike σ). Napokon je daljina točke A od σ jednaka prušcu $A'A'_1$.

U slici 272. povući će se h i v kroz O_1, a onda će se odrediti normalna projekcija A_1 na σ tako, da se $O_1 A'_1$ i $A''_2 A''$ prenesu iz sl. 271. u sliku 272. i to u dužine $O_1 A_2$ i $A_2 A_1$. Na taj pravac $A_2 A_1$ prenijet će se prema donjoj strani $A_1 A_0 = \frac{1}{2} \cdot A'A'_1$ (iz sl. 271.),, a iz O_1 opisat će se kružnica k_1, kojoj je polumjer polovina distancije d. Spoji li se A_0 s K na v i A_1 s O_1, dobit će se u sjecištu tih spojnica perspektiva A_c točke A. Jednako će se postupati za sve ostale točke; no konstrukcija se može znatno ujednostaviti upotrebom nedogledâ i t. d. Tako će na pr. normalna projekcija B_1 točke B, spojena s O_1, morati sadržavati perspektivu B_c, no kako je pružac AB i u perspektivi vertikalan, povući će se u A_c vertikala, koja $B_1 O_1$ siječe u B_c.



Sl. 272.

U sl. 272. radilo se dakle s polovinom distancije, koju ima O u sl. 271.

Zadaci za vježbu.

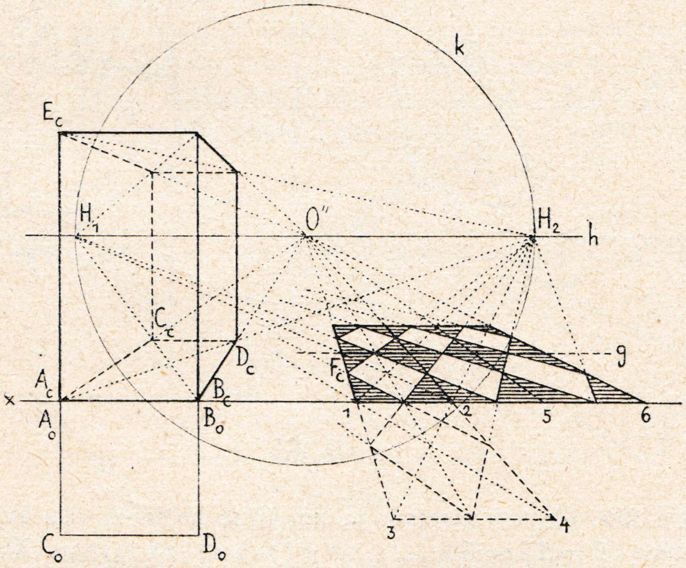
449.) Prikaži metodom distancijâ perspektivnu sliku kružnice, koja je upisana kvadratu u ravnini Π_1.

450.) Odredi metodom distancijâ perspektivu tijela predočena u sl. 268., za ravninu σ kao ravninu slike. Upotrebi $\frac{1}{2}$ distancije!

451.) Prikaži perspektivu tijela u sl. 124. zajedno sa sjenom, i to metodom distancijâ; ravnina je slike ravnina xz.

452.) Prikaži u normalnim projekcijama uspravnu kvadratsku prizmu, kojoj je osnovka u Π_1, i odredi perspektivu metodom distancijâ na ravninu slike, koja je položena kroz dva suprotna brida prizme. Uzmi $\frac{1}{2}$ distancije!

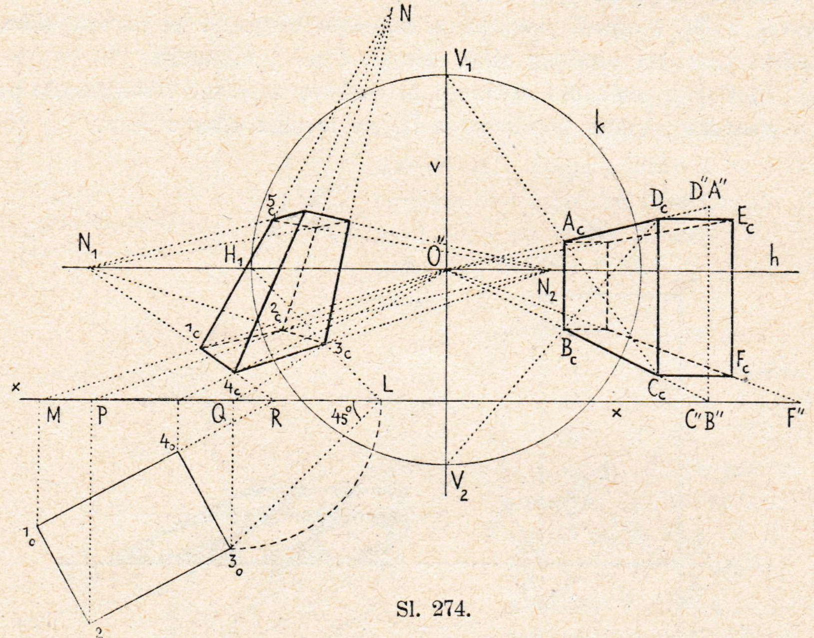
453.) Odredi metodom distancijâ perspektivu uspravne šesterostrane prizme, kojoj je osnovka pravilan šesterokut u Π_2 na ravninu slike $\sigma \perp x$.



Sl. 273.

147. Određenje perspektivnih slika neposrednom upotrebom nedogledâ. *1.* Ako je položaj nekoga pravilnoga tijela prema ravnini slike dovoljno određen, moći će se sastaviti njegova perspektivna slika, a da se kod toga ne upotrebi ni metoda probodištâ ni metoda distancijâ. Tako je u slici 273. (lijevo) predočena perspektiva pravilne kvadratičke prizme, kojoj je brid AB osnovke u osi x, dakle jedna pobočka u Π_2; ravnina je slike uzeta u ravnini Π_2, a prizma je iza te ravnine.

Brid AB osnovke bit će ujedno i perspektivna slika $A_c\,B_c$. Stranice $A\,C$ i $B\,D$ osnovnoga kvadrata u prostoru su normalne na x; njihove će dakle perspektive biti pravci, koji se sastaju u glavnoj točki O'' (§ **143.**). Dijagonale su kvadrata $B\,C$ i $A\,D$ pravci, koji su prema osi x priklonjeni pod 45^0; njihovi su dakle nedogledi u horizontalnim točkama distancije H_1 i H_2. Time se ujedno dobivaju perspektive C_c i D_c dvaju vrhovâ osnovnoga kvadrata. Vertikalni bridovi prizme ostaju i u perspektivi vertikalni. Visina se prizme mjeri u pravoj veličini na bridu $A_c\,E_c$, jer je taj brid u ravnini slike. Gornja osnovka daje perspektivnu sliku, koja će se opet odrediti s pomoću točaka O'', H_1 i H_2.



Sl. 274.

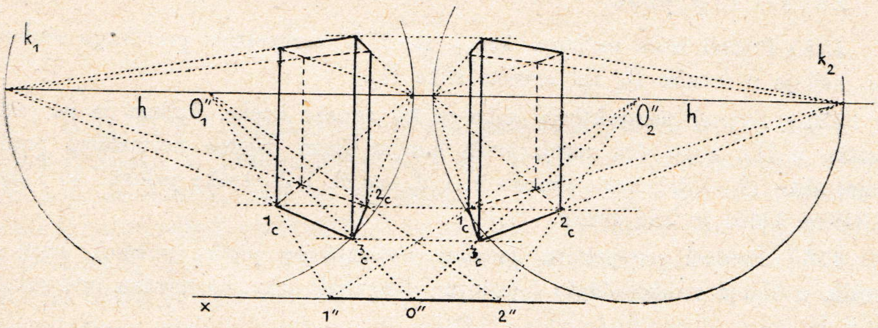
U slici 273. (desno) nacrtano je tim istim načinom više kvadratâ, koji imaju stranice $1\,2 = 2\,5 = 5\,6, \ldots\ldots$ na x i koji su iza ravnine slike. Isto tako veliki kvadrat $1\,2\,3\,4$, koji je pred ravninom slike, predočen je perspektivno na Π_2, da se vidi, kako se mijenja veličina iste figure već prema tome, je li ona pred ravninom slike ili iza nje.

2. Iza ravnine slike namješten je u Π_1 koso prema Π_2 pravokutnik $1\,2\,3\,4$ (slika 274., lijevo). Pravokutnik je oko osi x zaokrenut u ravninu slike Π_2 ispod osi x u $1_0\,2_0\,3_0\,4_0$. Spustimo li iz vrha 1_0 normalu $1_0 M$ na x, bit će perspektiva toga pravca $M\,O''$, jer je $1\,M$ normala na ravninu slike. Isto će tako biti $Q\,O''$ perspektiva normale $3\,Q$ i t. d. Povučemo li kroz 3_0 pravac $3_0 L$, koji čini s osi x, dakle i s ravninom slike,

kut od 45^0, bit će perspektiva toga pravca $L H_1$ (§ **143.**). U sjecištu pravaca $L H_1$ i $Q O''$ imamo dakle perspektivu 3_c vrha 3. Isto će se tako dobiti perspektive 1_c, 2_c i 4_c. Budući da su bridovi 1 4 i 2 3 paralelni i u prostoru horizontalni, morat će nedogled N_1 njihovih perspektivnih slika biti na h. Isto je tako N_2 na h nedogled za 1 2 i 3 4. Brid 1 4 i perspektiva $1_c\, 4_c$ nalaze se u ravnini, koja ide okom O; zato će se 1 4 ili preložaj $1_0\, 4_0$, i $1_c\, 4_c$ sjeći na osi x u R. Točka će se R upotrebiti za kontrolu točnoga crtanja.

Nad pravokutnikom 1 2 3 4 uzdignuta je kosa prizma; svi njezini pobočni paralelni bridovi imaju isti nedogled, koji je izabran po volji u točki N u Π_2. Smjer bridova u prostoru može se doznati, ako se zamisli povučena spojnica $O N$. Prizma je gore omeđena horizontalnim pravokutnikom, za koji će perspektiva imati ista dva nedogleda N_1 i N_2 kao i perspektiva donje osnovke. Vrh 5_c gornje osnovke izabran je po volji; visina prizme nije dakle unaprijed određena.

Na slici 274. (desno) predočen je najprije perspektivno kvadrat $A B C D$, kojemu je ravnina normalna na ravnini slike Π_2 i ujedno vertikalno položena. Dvije vertikalne stranice kvadrata, $A B$ i $C D$, bit će i u perspektivnoj slici vertikalni pravci; obje stranice $A D$ i $B C$ (stranica $B C$



Sl. 275.

u Π_1), koje su normalne na Π_2, imat će perspektivne slike $A_c\, D_c$ i $B_c\, C_e$ na pravcima, kojima je nedogled glavna točka O''. Budući da dijagonale $A C$ i $B D$ čine s Π_2 priklone kutove 45^0, a nalaze se u ravnini, koja je paralelna s ravninom $O v$, bit će nedogledi za perspektive tih dijagonala točke distancije V_1 i V_2 na vertikali v. Kvadrat je $A B C D$ odmaknut od ravnine slike; prava se dakle veličina stranice kvadrata ne razabira neposredno iz perspektive. Produžimo li $O''\, A_c$ i $O''\, B_c$ do A'' i B'', gdje je B'' na x, a $A''\, B'' \perp x$, bit će $A''\, B''$ prava dužina na stranicu kvadrata, jer su A'' i B'' (ili C'' i D'') ortogonalne projekcije vrhová A i B (dotično C i D) na Π_2. Kvadrat je uzet kao pobočka prizme, kojoj je prednji donji

horizontalni brid predočen perspektivom $C_c\ F_c$; prava će se dužina CF toga brida naći slično kao za $A''\,B''$, u $C''\,F''$.

148. Stereoskopske slike. Poznate stereoskopske slike nijesu drugo negoli dvije perspektive istoga predmeta za lijevo i desno oko O_1 i O_2, gdje se uzima, da je (normalno) dužina $O_1\ O_2 = 6{\cdot}5$ cm, a obje distancije jednake. Stave li se takve dvije slike u spravu (stereoskop od Brewstera, 1843.), dobit ćemo utisak, kao da gledamo plastični prostorni predmet. Takove su dvije perspektive konstruirane u slici 275. za uspravnu kvadratsku prizmu, kojoj je osnovka u Π_1 položena tako, da je jedna dijagonala 1 2 paralelna s osi x. Prava je veličina dijagonale pružac $1''\ 2''$ na osi x ($1''\,0'' = 0''\,2''$) tako, da se pravci $1''\ 1_c$, $2''\ 2_c$ i druga dijagonala sastaju za lijevo oko u O''_1, za desno oko u O''_2. Paralelne stranice imaju nedoglede u točkama distancijâ na h za jednu i drugu kružnicu distancije k_1 i k_2. (Gledaj za „stereoskop“ pobliže u fizici).

Bilješka. Perspektive u slikama 273.—275. više su izravne perspektive, jer su izvedene samo s pomoću nedogledâ O'', N_1, N_2 i t. d., a ne posredovanjem normalnih projekcija. Uza sve to ipak su pridodane ovome odsječku, jer se s njim daju veoma jednostavno dovesti u svezu.

Zadaci za vježbu.

454.) Prikaži istim načinom kao u sl. 274. perspektivu pravilnoga šesterokuta, koji je u ravnini Π_1 iza ravnine slike Π_2.

455.) Nacrtaj perspektivne slike za tri jednake kocke, kojima je po jedna pobočka u Π_1, a po dva gornja brida leže na istim dvjema normalama prema ravnini slike Π_2. Udaljenosti između 1. i 2., pa 2. i 3. kocke jednake su i dvaput tolike, koliki je brid kocke.

456.) Predoči perspektivu pravilne peterostrane ploče (prizme), kojoj je osnovka u Π_1, a visina jednaka $\frac{1}{3}$ osnovne dijagonale tako, da nijedan brid prizme nije u Π_2.

457.) Zadan je trapez, kojemu su dvije stranice paralelne s osi x, a druge se dvije sijeku produžene u točki O''. Kolika je distancija, ako je taj trapez perspektiva nekoga kvadrata?

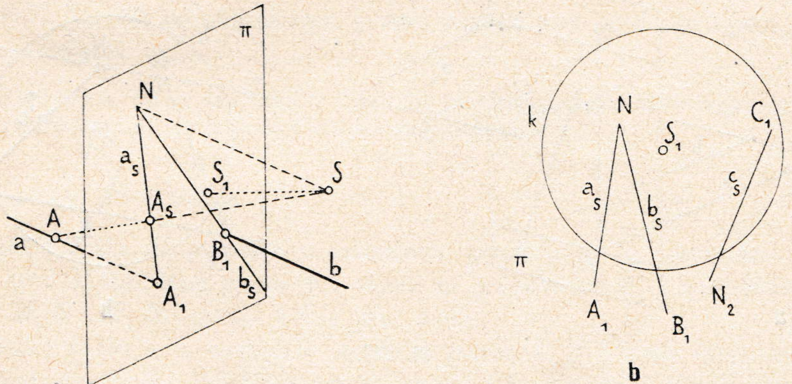
458.) Prikaži perspektivu uspravne kvadratske prizme, kojoj je osnovka paralelna s Π_1, i odredi perspektivu kojegagod njezina presjeka paralelna s Π_1.

459.) Odredi perspektivu kvadrata, kojemu je ravnina normalna na ravnini slike Π_2, jedna dijagonala vertikalna, a jedan vrh u Π_1. Najposlije odredi pravu veličinu za stranicu toga kvadrata.

460.) Nacrtaj perspektivu uspravne kvadratske prizme, kojoj je osnovka u ravnini slike Π_2, i koja ima zadanu visinu p iza Π_2 (isp. određenje točke 3_c u sl. 274.). Riješi isti zadatak, ako se piramida uzdiže pred Π_2.

II. Općena centralna projekcija (slobodna perspektiva).

149. Projekcija pravca i točke. Kod općenoga centralnoga projiciranja (isp. § **140.**) dolazi u obzir samo ravnina slike Π (ravnina crtnje), središte projiciranja, koje ćemo obilježiti sa S, i glavna točka S_1, t. j. normalna projekcija točke S na Π. U slobodnoj se centralnoj projekciji obično ne upotrebljava ni osnovna ravnina Π_1 ni horizont ni vertikala, nego samo za metrička pitanja kružnica k distancije.



a b

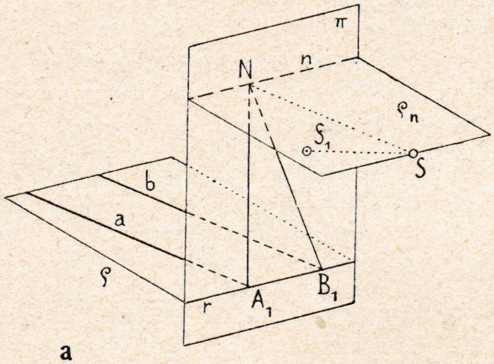
Sl. 276.

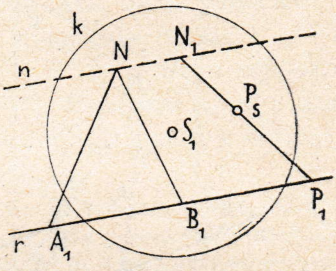
U slici 276. a prikazana su dva paralelna pravca a i b, koji ravninu slike Π sijeku u probodištima A_1 i B_1. Pravci imaju zajednički nedogled N, koji se dobiva, ako se središtem S projiciranja povuče paralela SN s a i b, pa se odredi probodište N te paralele s ravninom slike Π (isp. § **143.**). Pravci su $a_s \equiv A_1 N$ i $b_s \equiv B_1 N$ centralne projekcije pravaca a i b. I onda, ako je samo jedan pravac, na pr. a, zadan, određuje se njegova centralna projekcija a_s probodištem A_1 na Π i nedogledom N, gdje je $SN \parallel a$. U slici 276. b uzeto je, da je papir, na kojem se crta, ravnina slike Π; središte je projiciranja S u prostoru nad glavnom točkom S_1 u udaljenosti (distanciji), koja je jednaka polumjeru kružnice k. U slici su predočena dva paralelna pravca a i b, a onda pojedinačni pravac c centralnom projekcijom $c_s \equiv C_1 N_2$; točka je C_1 njegovo probodište na Π, a N_2 nedogled. Kako je pravac c položen u prostoru, to se može doznati, ako se S spoji s N_2 (isp. sl. 276. a), a onda kroz C_1 položi pravac $c \parallel SN_2$. Pravac se SN_2 zove nedogledna zraka.

Neka točka A u prostoru ima centralnu projekciju A_s, koja je probodište spojnice SA s ravninom slike (sl. 276. a). Takva projekcija A_s ne određuje dovoljno položaj točke A u prostoru, jer je A_s ujedno centralna

projekcija svih točaka na zraci SA. Položaj će se za A odrediti dosta tako, da se nacrta centralna projekcija a_s kojegagod pravca a, koji ide točkom A. Tako je u sl. 276. a točka A prikazana projekcijom A_s i projekcijom $A_1 N$ pravca a, koji sadržava A. Ovako upotrebljen pravac a zove se nosilac točke A.

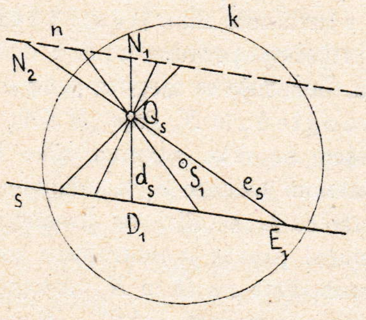
Nedogled pravca, koji je normalan na Π, bit će u glavnoj točki (isp. § **143.**).





Sl. 277.

150. Predočivanje ravnine. Neka ravnina ρ siječe ravninu slike Π u tragu r (slika 277. a, b). Središtem S položit ćemo ravninu $\rho_n \parallel \rho$, koja će Π sjeći u pravcu $n \parallel r$. Pravac se n zove nedoglednica ravnine ρ ili njezin nedogledni trag. Ravnina je ρ tragovima $r \parallel n$ potpuno određena; položimo li naime „nedoglednu ravninu" $\rho_n \equiv (S, n)$, bit će ravnina ρ ona, koja se može položiti kroz r paralelno s ρ_n.



Sl. 278.

Dva paralelna pravca a i b u ρ imat će centralne projekcije $A_1 N$ i $B_1 N$, za koje će A_1 i B_1 biti na tragu r ravnine ρ, a zajednički njihov nedogled N na nedoglednici n te ravnine. Pravac naime $SN \parallel a \parallel b$ mora imati probodište N na n. Ako su dakle u slici 277. b zadane centralne projekcije $A_1 N$ i $B_1 N$ dviju paralelâ a i b, dobit će se oba traga ravnine ρ, koja je tim paralelama određena, ako se povuče $A_1 B_1 \equiv r$, a onda kroz N položi $n \parallel r$.

Svaki pravac p ravnine ρ ima svoje probodište P_1 na tragu r, a nedogled N_1 na nedoglednici n.

U slici 278. predočena je centralna projekcija pramena zraka, kojemu je vrh točka Q. Sve su naime zrake pramena u istoj ravnini σ, pa su zato njihova probodišta na tragu s, a nedogledi na nedoglednici n. Uzmimo kojegod dvije zrake d i e pramena; to su dva raznosmjerna pravca, koji se sijeku u točki Q. Takovim se pravcima može položiti ravnina σ. Njezin je trag s spojnica probodištâ D_1 i E_1 onih raznosmjernica, a njezina je nedoglednica n spojnica nedogledâ N_1 i N_2. Ako su dakle dva pravca d i e zadana svojim centralnim projekcijama $d_s = D_1 N_1$ i $e_s = E_1 N_2$, moći ćemo lako odrediti, sijeku li se u prostoru ili su mimosmjerni. Ako je $D_1 E_1 \parallel N_1 N_2$, bit će oba pravca u istoj ravnini, pa se dakle sijeku, inače su mimosmjerni.

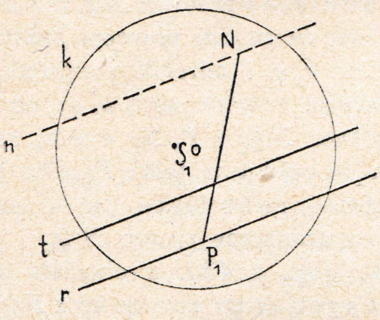
Bilješka. Da se oba traga (r i n) neke ravnine uzmognu lakše raspoznati, crtat ćemo trag potpuno, a nedoglednicu svagda prekinuto.

Zadaci za vježbu.

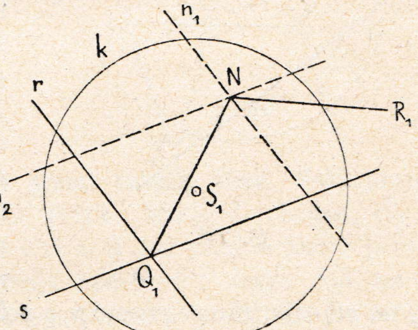
461.) Točka M prikazana je centralnom projekcijom M_s na nosiocu $M_1 N$. Položi kroz M koji drugi pravac p i odredi ga probodištem P_1 i nedogledom N_1. Pravci $M_1 N$ i $P_1 N_1$ moraju biti u istoj ravnini.

462.) Zadan je u centralnoj projekciji pravac $L_1 N$ i izvan njega točka T na nosiocu $t = T_1 N_2$. Položi točkom T paralelu s $L_1 N$ i odredi njezinu centralnu projekciju.

463.) Pravcem $R_1 N$ i točkom K, na nosiocu $K_1 N_1$ položi ravninu ρ.



Sl. 279.



Sl. 280.

464.) Kakov položaj ima u prostoru ravnina σ, kojoj trag s i nedoglednica n padaju zajedno? Nacrtaj centralnu projekciju kojegagod pravca te ravnine.

465.) Zadan je pravac $T_1 N$; položi tim pravcem ravninu τ, koja je vertikalna, i odredi njezine tragove t i n. Kakova je nedoglednica vertikalne ravnine?

466.) Kakov položaj prema Π imaju ravnine, kojima nedoglednice prolaze glavnom točkom S_1? Koje ravnine imaju nedoglednicu u horizontu?

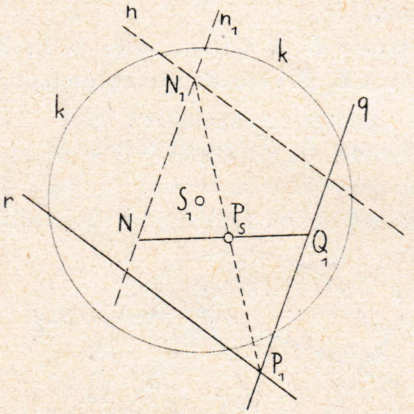
467.) Položi pravcem $Q_1 N$ ravninu, koja je normalna na ravnini slike; odredi njezine tragove q i n.

468.) Nacrtaj centralne projekcije dvaju pravaca p i q, koji su normalni na ravnini slike tako, da njima položena ravnina σ bude horizontalna.

151. Dvije ravnine. Pravac i ravnina. Iz slike 277.a izlazi, da će dvije paralelne ravnine ρ i τ imati istu nedoglednu ravninu ρ_n, dakle i zajedničku nedoglednicu n (slika 279.); tragovi će im r i t biti paralelni.

Pravac NP_1, koji je u ravnini nr, bit će paralelan s ravninom τ. Pravac dakle, koji je paralelan s ravninom, ima svoj nedogled N na nedoglednici n te ravnine, ali mu trag P_1 nije na tragu t ravnine.

Dvije ravnine ρ i σ, koje nijesu paralelne, sijeku se u pravcu (slika 280.). Taj će se pravac (presječnica) prikazati u centralnoj projekciji kao spojnica one točke N, u kojoj se sijeku nedoglednice n_1 i n_2 zadanih ravnina, i one točke Q_1, u kojoj se sijeku tragovi r i s tih ravnina. Pravac je naime NQ_1 i u jednoj i u drugoj ravnini, pa mu je zato nedogled N na nedoglednici jedne i druge ravnine, a probodište Q_1 na jednom i drugom tragu obadviju ravnina.



Sl. 281.

Pravac je NR_1 paralelan s obadvije ravnine ρ i σ, no nije ni u jednoj od njih posve sadržan.

Da se za zadanu ravninu nr odredi probodište s pravcem NQ_1 (slika 281.), položit će se tim pravcem kakvagod ravnina $n_1 q$ i odrediti presječnica $N_1 P_1$ obadviju ravnina nr i $n_1 q$; obadva su pravca NQ_1 i $P_1 N_1$ u istoj ravnini, pa se sijeku u točki P_s. Ta je točka traženo probodište, jer se ona nalazi i na zadanome pravcu NQ_1 i u ravnini nr (isp. § **43.**). Probodište se P_s ne mijenja, ako se mjesto $n_1 q$ položi kakvagod druga ravnina kroz NQ_1.

Zadaci za vježbu.

469.) Zadana je ravnina nr i izvan nje točka P_s na nosiocu $NP_1 = p$. Povuci točkom P neki pravac q, koji će biti paralelan sa zadanom ravninom. Nedogled N_1 za q mora biti na n, a pravci su p i q u istoj ravnini.

470.) Položi točkom T_s (na $T_1 N$) pravac, koji je paralelan s ravninama r, n i s, n_1.

471.) Pravcem $R_1 N$ položi ravninu, koja je paralelna s pravcem $K_1 N_1$.

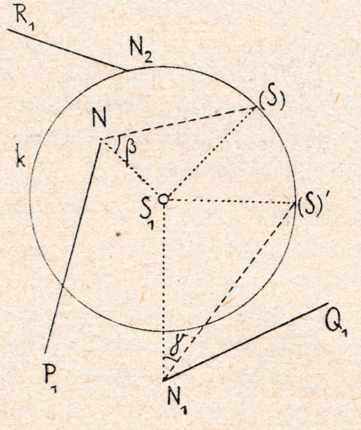
472.) Položi kojugod ravninu, koja je paralelna s dva mimosmjerna pravca $N G_1$ i $N_1 L_1$.

473.) Položi ravninu kao u zad. 472., no tako, da ona ide točkom P_s (na $P_1 N$).

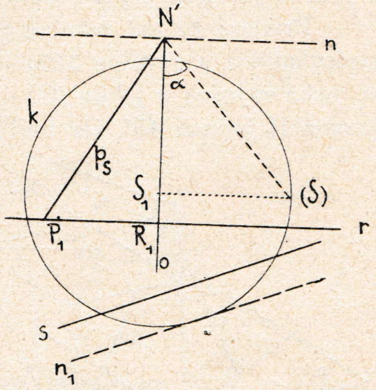
474.) Odredi tri para paralelnih ravnina i sve njihove presječnice, koje će biti bridovi kose prizme. Odredi svih osam vrhova.

475.) Zadana su dva mimosmjerna pravca $A_1 N_1$ i $B_1 N_2$, pa točka P_s (na $P_1 N$). Položi točkom P pravac, koji siječe oba zadana pravca (isp. zad. 131.).

476.) Položi točkom R_s (na $R_1 N$) pravac q, koji će sjeći zadan pravac $p = P_1 N_1$, a bit će paralelan s ravninom $\rho = n, r$. Položi točkom R ravninu $\sigma \parallel \rho$, a onda traži probodište za σ s p.



Sl. 282.



Sl. 283.

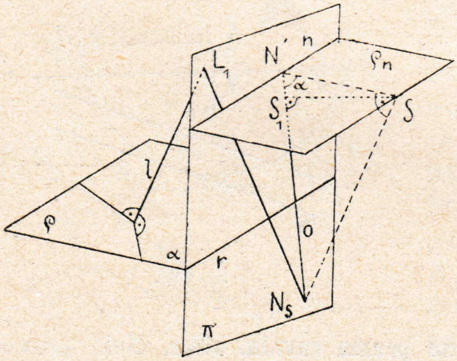
152. Prikloni kut pravca i ravnine prema ravnini slike. Neki pravac p ima probodište P_1 na Π i nedogled N (slika 282.). Zamislimo, da je u prostoru povučena spojnica SN; ona čini s Π isti priklon kao i pravac p, jer je $SN \parallel p$. Ortogonalna je projekcija nedogledne zrake SN na Π pružac $S_1 N$; zato je $\sphericalangle SNS_1 = \beta$ priklon pravca p prema Π. Da se kut β odredi, preložit ćemo pravokutni trokut $SS_1 N$ oko $S_1 N$ u Π; kateta je $S_1 S$ preložena u $S_1 (S)$, pa je ta dužina jednaka distanciji ili polumjeru kružnice k distancije. Istim je načinom određen priklon γ pravca $Q_1 N_1$. U trokutima je $(S) S_1 N$ i $(S)' S_1 N_1$ kut $\beta > \gamma$. Pravci, koji imaju nedogled izvan kružnice k, zatvaraju s Π manji kut negoli oni, za koje je nedogled u kružnici k. Svi će pak pravci, koji imaju nedoglede na kružnici k, činiti s Π kut od 45^0 (isp. § **141.**).

Svi pravci, koji imaju **isti** priklon β, imaju nedoglede na određenoj kružnici koncentričnoj s k.

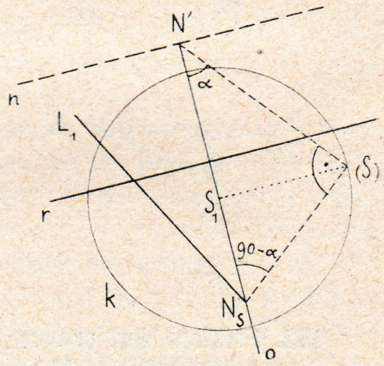
Ravnina ρ zadana je tragovima r i n (slika 283.); odredit ćemo njezin priklon α prema Π. Budući da je nedogledna ravnina ρn paralelna s ρ, činit će ona s Π isti priklon kao i ρ. Položit ćemo središtem S ravninu normalno na nedogledniсu n. Trag te ravnine bit će pravac $o \perp n$; on siječe n u N'. U pravokutnom trokutu SS_1N' bit će kut $SN'S_1 = \alpha$ traženi priklon. Taj će se kut konstruirati tako, da se trokut SS_1N' preloži oko S_1N' u Π. Kateta je S_1 (S) jednaka distanciji ili polumjeru kružnice k.

Označimo li točku, u kojoj trag o siječe r, slovom R_1, dobit ćemo u prušcu R_1N' projekciju pravca ravnine ρ; taj je pravac **okomit** na tragu r, pa je zato **priklonica** ravnine ρ. Odredimo li zaista prikloni kut toga pravca kao u slici 282., vidjet ćemo, da je taj kut jednak priklonu α ravnine ρ (§ **6.**, 4). Točka je N' zajednički nedogled za sve priklonice ravnine ρ. I pravac je dakle P_1N' priklonica te ravnine.

Prikloni će kut ravnine prema Π biti veći ili manji prema tomu, je li nedogledniсa n ravnine bliža ili dalja od glavne točke S_1. Ako nedogledniсa n_1 neke ravnine σ (slika 283.) **dotiče** kružnicu k, bit će priklon ravnine σ prema Π jednak 45^0, jer toliki kut čini i njezina priklonica s Π.



Sl. 284.



Sl. 285.

Sve ravnine, koje imaju **isti** priklon α, imaju nedogledniсe, koje dotiču određenu kružnicu koncentričnu s k.

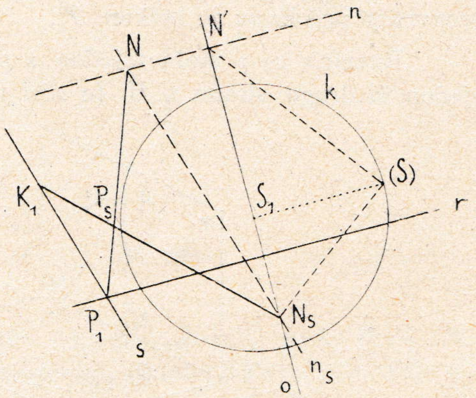
Bilješka. U svim zadaćama, koje se tiču samo presječnicâ, probodištâ i dr. nije bila upotrebljena kružnica k. Čim se pak pojavilo **metričko** pitanje priklonoga kuta (sl. 282.) bilo je potrebno poznavanje kružnice k.

153. Okomica ravnine. Budući da su sve normale neke ravnine ρ paralelni pravci, imat će oni isti nedogled N_s. U **slici** 284. prikazano je određenje takova nedogleda u prostoru. Pravac je $l \perp \rho$. Nedogledna zraka $SN_s \parallel l$ mora biti normalna na nedoglednoj ravnini $\rho n \parallel \rho$. Položimo li

središtem S ravninu normalno na nedoglednicu n, sjeći će ona Π u tragu o, koji ide točkom N_s, a siječe n u t. zv. sporednoj točki N'. Trokut je $N'SN_s$ kod S pravokutan. Kateta mu je $N'S$ prava veličina udaljenosti središta S od nedoglednice n. Ta udaljenost izlazi opet kao hipotenuza u pravokutnom trokutu SS_1N'. Kad je ravnina ρ horizontalna, njezina je nedoglednica horizont h, a „sporedna“ je točka ujedno glavna točka S_1.

U slici 285. izvedeno je u ravnini crtnje određenje za nedogled N_s, koji pripada normalama ravnine $\rho = n, r$. Točkom je S_1 položen pravac $o \perp n$; njegovo je sjecište na n sporedna točka za ravninu ρ, t. j. N'. Preloži li se S oko o u (S), povuče $(S)N'$, a onda u (S) postavi $(S)N_s \perp (S)N'$, dobit će se na o traženi nedogled N_s. Kojigod pravac N_sL_1, koji ima u N_s nedogled, bit će centralna projekcija jedne okomice za ravninu ρ.

U slici 286. razriješena je ova zadaća: „Točkom P_s na pravcu P_1N ravnine $\rho = n, r$ postavi normalu na ρ i odredi njezino probodište K_1 na ravnini Π.“ Za ravninu će se ρ istumačenim načinom naći nedogled N_s normalâ. Spojnica NN_s bit će nedoglednica n_s neke ravnine σ, a kroz P_1 povučeni pravac $s \parallel n_s$ bit će trag te ravnine. Pravac N_sP_s siječe s u K_1 tako, da je N_sK_1 normala ravnine ρ; točka je K_1 probodište te normale na ravnini slike. Budući da ravnina $\sigma = n_s, s$ prolazi normalom N_sK ravnine ρ, bit će $\sigma \perp \rho$. Kad bismo odredili nedogled N'_s normalâ za ravninu σ, opazili bismo, da taj nedogled mora biti na nedoglednici n. Zašto?



Sl. 286.

Zadaci za vježbu.

477.) Položi točkom P_s (na P_1N) kojigod pravac, koji s ravninom Π zatvara kut $\beta = 60^0$, i odredi ga nedogledom i probodištem.

478.) Predoči centralnu projekciju pravca, koji je horizontalan, a zatvora s Π $\sphericalangle \gamma = 30^0$.

479.) Zadana je glavna točka S_1 i centralna projekcija Q_1N pravca q. Kolika mora biti distancija, ako hoćemo, da q čini s Π $\sphericalangle \beta = 60^0$.

480.) Pravcem $p = P_1N$ ($\beta < 60^0$) položi ravninu ρ, koja čini s Π $\sphericalangle \alpha = 60^0$. (Isp. § 14., a).

481.) U ravnini $\sigma = s, n$ ($\alpha > 45^0$) povuci pravac, koji s Π čini kut $\gamma = 45^0$. (Isp. § 14, a).

482.) Odredi nedoglednicu n_1 ravnine τ, koja raspolavlja prikloni kut ravnine $\sigma \equiv s, n$ prema Π.

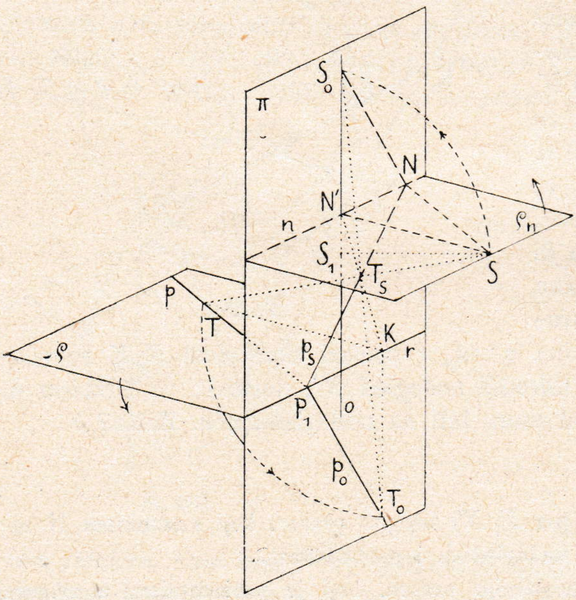
483.) Gdje je nedogled N_s za sve normale horizontalne ravnine? Rastumači tim načinom, zašto su centralne projekcije vertikalnih pravaca opet vertikale.

484.) Postavi na pravac $p \equiv P_1 N$ kojugod normalnu ravninu. Nedoglednica n tražene ravnine dobit će se obrnutim postupkom prema sl. 286.

485.) U točki M_s pravca $p \equiv P_1 N$ postavi na p kojugod normalu. Postupaj tako kao u zad. 484., ili položi pravcem p kojugod ravninu, odredi za nju nedogled normalâ N_s i povuci $N_s M_s$.

154. Preloženje ravnine. U slici 287. prikazana je ravnina ρ i u njoj pravac p; centralna je projekcija toga pravca $P_1 N$, a projekcija točke T pravca p prikazana je točkom T_s.

Ravnina se ρ može zajedno s pravcem p zaokrenuti oko traga r na jednu ili drugu stranu u Π (u slici je izabrani okret označen strjelicom). Poslije zaokreta dolazi pravac u p_0, a T u T_0. Oko nedoglednice n ravnine ρ zaokrenut ćemo opet nedoglednu ravninu ρn zajedno sa središtem S u Π, i to u istome smislu, kao što je zaokrenuta ravnina ρ. Dio ravnine ρ, koji je pred ravninom slike, došao bi kod izabranoga zaokreta prema gore; zato će i ρn biti okrenuto prema gore.



Sl. 287.

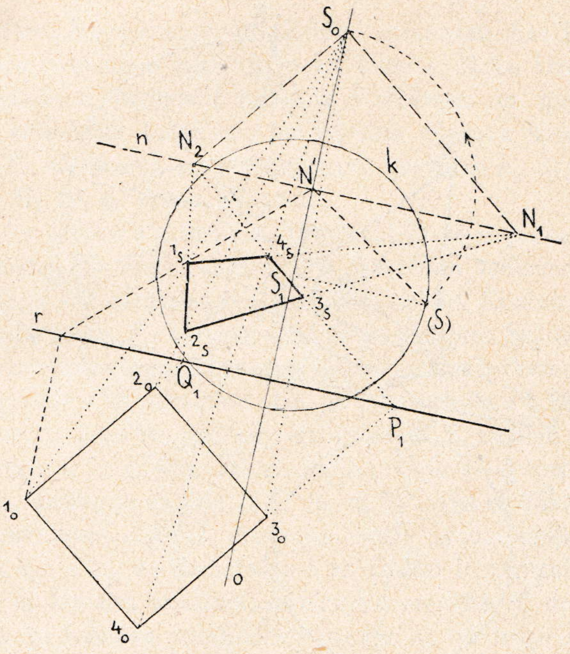
Spusti li se iz S normala na n, i nožištem N' normale položi $o \perp n$, morat će preloženo središte S_0 biti na o. Bit će prava veličina $N'S = N'S_0$. Nedogledna zraka za pravac p, t. j. $SN \parallel p$, doći će u preložaj $S_0 N \parallel p_0$. Zraka ST, kojom se projicira točka T, bit će u preložaju pravac $S_0 T_s T_0$. Normala $T_0 K$ na r imat će centralnu projekciju KN', koja sadržava projekciju T_s.

Ako je dakle poznata centralna projekcija $P_1 N$ pravca p, odredit će se lako njegov preložaj p_0. Naći će se S_0, povući $S_0 N$, a onda točkom P_1

položiti $p_0 \parallel S_0 N$. Obrnutim će se postupkom iz preložaja p_0 odrediti centralna projekcija $p_s = P_1 N$.

Preloženje ravnine upotrebit će se uvijek, kad se radi o metričkim zadacima, dakle o dužinama, kutovima, pravilnim likovima i t. d.

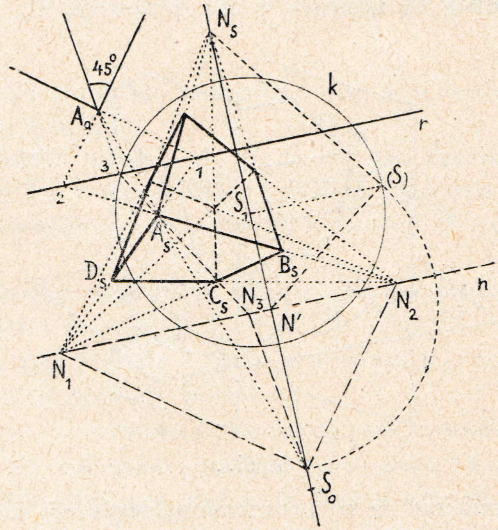
U slici 288. provedeno je određenje centralne projekcije za kvadrat, koji je u ravnini $\rho = r, n$ a zadan je svojim preložajem $1_0 2_0 3_0 4_0$. Prava je veličina udaljenosti SN' hipotenuza $(S)N'$ pravokutnoga trokuta $N' S_1 (S)$; bit će dakle $N' S_0 = N'(S)$, pa je time dobiveno preloženo središte S_0 na pravcu o, povučenu kroz S_1 normalno na n.



Sl. 288.

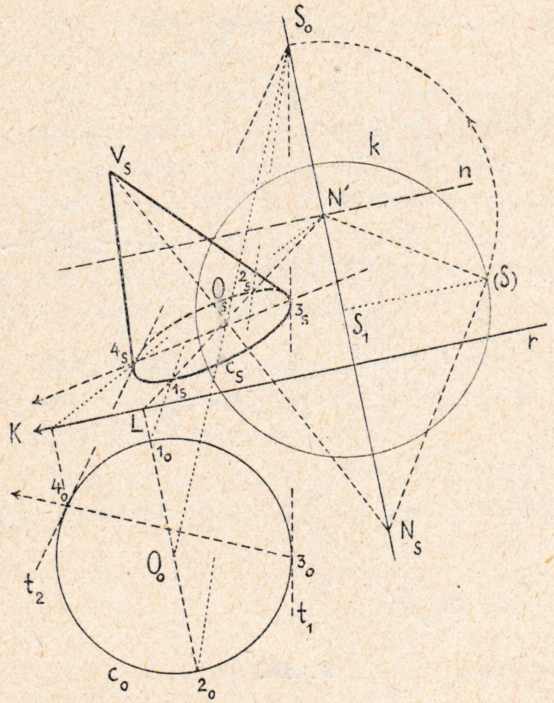
Nacrtamo li $S_0 N_2 \parallel 3_0 4_0$, dobit ćemo na n nedogled N_2, pa će $P_1 N_2$ biti centralna projekcija pravca, na kojem je projekcija stranice $3\,4$ kvadrata. Vrhovi 3_s i 4_s odredit će se spojnicama $S_0 3_0$ i $S_0 4_0$. Iz slike izlazi jasno, kako će se dobiti dalji dijelovi za centralnu projekciju kvadrata.

Slika nam 288. prikazuje ujedno centričku kolineaciju (perspektivni položaj) za obadva lika $1_0 2_0 3_0 4_0$ i $1_s 2_s 3_s 4_s$. Trag je r os kolineacije, a točka S_0 središte njezino (isp. § **107.**). Zrake su $S_0 1_0$, $S_0 2_0$ i t. d. takvi pravci, za koje centralne projekcije padaju zajedno s preložajima.



Sl. 289.

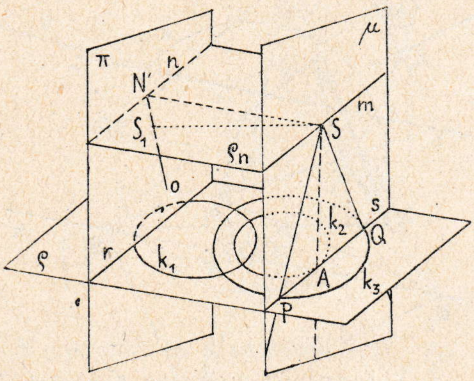
155. Predočivanje prizme i stošca u općenom položaju. Kvadrat u ravnini ρ predočen je u centralnoj projekciji (slika 289.) istim



Sl. 290.

postupkom kao u sl. 288. U preložaju je istaknut samo njegov vrh A_0 pa obje stranice (i dijagonala), koje prolaze tim vrhom. U projekciji je dužina $A_s B_s$ za stranicu kvadrata izabrana po volji; opet je $S_0 N_1 \parallel 1 A_0$ i t. d. Za ravninu je ρ poznatim načinom određen nedogled N_s svih normala; vrhovi A_s, B_s, C_s, D_s kvadrata, spojeni s N_s, daju bridove uspravne prizme, kojoj je gornja osnovka izabrana u kojojgod udaljenosti od osnovke.

U slici 290. predočena je centralna projekcija c_s kružnice, koja je u ravnini ρ, a zadana je svojim preložajem c_0. Dijametar $1_0 2_0 \perp r$ ima centralnu projekciju na LN'; njegova je centralna slika pružac $1_s 2_s$, koji izlazi s pomoću spojnicâ $S_0 1_0$ i $S_0 2_0$. Središte O_0 kružnice c ima projekciju O_s, koja nije središte za eliptičku projekciju c_s. Tangente t_1 i t_2 kružnice c_0, povučene iz S_0, bit će ujedno tangente za c_s.



Sl. 291.

Za ravninu ρ određen je nedogled N_s svih normala, pa je središtem O_s položen pravac, kojemu je nedogled u N_s. Na tome je pravcu izabrana točka V_s kao vrh stošca, koji je uspravan. Probodište visine $V_s N_s$ na ravnini slike imalo bi se istom odrediti.

156. Sjekotine stošca kao centralne projekcije kružnice. Neka kružnica, koja je u ravnini ρ, prikazat će se u centralnoj projekciji kao elipsa, parabola ili hiperbola. Vrsta te projekcije zavisi o položaju zadane kružnice prema ravnini

μ, koja se može položiti središtem S projiciranja paralelno s ravninom slike Π (slika 291.). Pravac, u kojem ravnina ρ siječe μ, neka bude s. Neka kružnica k_1, koja ne siječe pravac s, projicirat će se iz S stošcem, za koji će sve izvodnice sjeći Π u konačnim točkama, jer nijedna njegova izvodnica ne će biti paralelna s Π. Centralna projekcija takve kružnice k_1, t. j. presjek stošca Sk_1 ravninom Π, bit će dakle elipsa.

Kružnica k_2, koja dotiče pravac s u točki A, projicirat će se u parabolu, jer će sve izvodnice stošca Sk_2 sjeći ravninu Π u konačnim točkama, samo ne će izvodnica SA, koja je s Π paralelna (isp. zad. 350. i 359.). Kružnica k_3, koja pravac s siječe u dvije točke P i Q, projicirat će se stošcem Sk_3 na Π u hiperbolu. Sve će naime izvodnice toga stošca sjeći Π u konačnim točkama, osim izvodnicâ SP i SQ, koje su s Π paralelne. Isp. za ovo izvode u § 99.

Vrsta će sjekotine stošca, u koju se projicira kružnica iz S, zavisiti o položaju kružnice prema pravcu s. Iz sl. 291. izlazi, da je pravac s od traga r ravnine ρ udaljen isto toliko, kolika je daljina SN' ili $S_0 N'$. Ako se dakle dio ravnine ρ, koji je pred ravninom slike Π, zaokrene oko r prema dolje, doći će pravac s ispod r u s_0, a S_0 će doći ispod n. Dolazi li naprotiv s_0 nad r, doći će i S_0 nad n. Drugim riječima: preloženo središte S_0 dolazi u udaljenost od n, koja je jednaka udaljenosti pravca s_0 od traga r, pa je i smisao za slijed elemenata n i S_0 isti kao i za slijed od r prema s_0. Pravac se dakle s_0 može lako odrediti.

Bilješka. U 17. vijeku bio je taj način perspektivnoga predočivanja kružnice izvorom za cijeli niz svojstava o sjekotinama stošca i za tumačenje onih odnosa za te krivulje, koji su bili poznati starim grčkim geometrima, napose Apoloniju (200. pr. Kr.).

Zadaci za vježbu.

486.) Predoči centralnu projekciju pravilnoga šesterokuta, koji je u ravnini $\rho \equiv r, n$, a zadan je preložajem $1_0\, 2_0\, 3_0\, 4_0\, 5_0\, 6_0$.

487.) Upotrebi u sl. 289. projekciju kvadrata $A_s\, B_s\, C_s\, D_s$ kao osnovku uspravne piramide, kojoj je vrh točka V_1 u ravnini slike. Sjecištem dijagonalâ i nedogledom N_s položi pravac i odredi njegovo probodište V_1 na ravnini Π (postupaj kao u sl. 286.).

488.) Prikaži centralnu projekciju uspravnoga valjka, kojemu je kružna osnovka u ravnini $\rho \equiv r, n$, a visina mu je uzeta po volji.

489.) Udesi položaj za preložaj neke kružnice k_2, koja je u ravnini $\rho \equiv r, n$ tako, da njezina centralna projekcija bude parabola (odredi s_0).

490.) Namjesti preložaj za k_3 tako, da centralna projekcija k_3^s bude hiperbola.

491.) Isporedi načine za određenje centralnih projekcija pravokutnika i kvadrata u sl. 274. i 288. Zašto bi u sl. 274. preloženo središte O_0 došlo u točku V_1?

492.) Odredi kut, koji čine dva pravca p i q ravnine $\rho \equiv r, n$, ako su zadane njihove centralne projekcije $P_1\, N_1$ i $Q_1\, N_2$. Zašto je traženi kut jednak $\sphericalangle N_1\, S_0 N_2$?

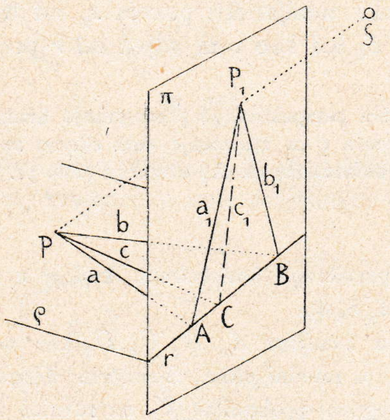
*

Drugi odsjek.

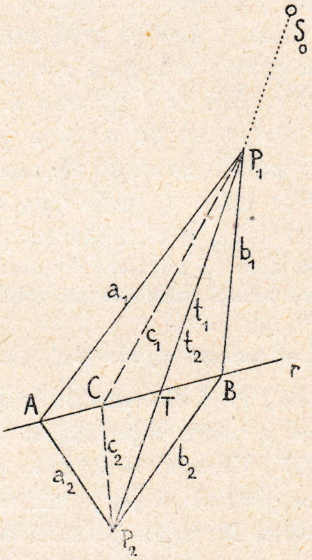
Perspektivnost i projektivna srodnost.

I. Prameni zrakâ i nizovi točaka.

157. Perspektivni prameni i nizovi. Pravci a i b u ravnini ρ (slika 292.) određuju pramen, kojemu je P vrh. Taj ćemo pramen, koji se može zamisliti ispunjen svim ostalim zrakama kroz P, obilježiti s $[P]$. Centralna će projekcija toga pramena iz nekoga središta S biti opet pramen $[P_1]$, pa ćemo mu pojedine zrake obilježiti s $a_1, b_1, \ldots\ldots$ Zrake $a, b, \ldots$ pramena $[P]$ i pripadne (korespondentne) zrake (centralne projekcije) $a_1, b_1, \ldots$ pramena $[P_1]$ sijeku se u točkama $A, B, \ldots$ na tragu r.



Sl. 292.

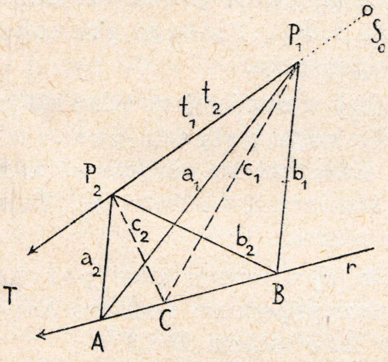


Sl. 293.

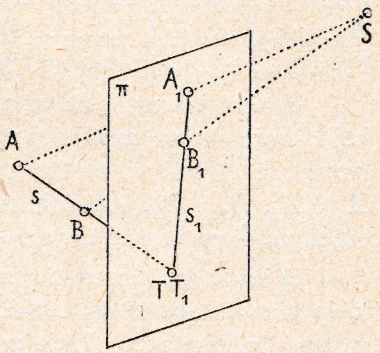
Zaokrenimo pramen $[P]$ oko r prema dolje u ravninu slike Π (gl. § **154.**), pa uzmimo, da je središte S došlo u preložaj S_0 (slika 293.). Preloženi ćemo pramen obilježiti s $[P_2]$, a njegove zrake s $a_2, b_2, \ldots$ Točke će $A, B, \ldots$ na r ostati kod preloženja netaknute. Osim toga će se u pramenima $[P_1]$ i $[P_2]$ pojaviti zraka, u kojoj su ujedinjene dvije pripadne zrake t_1 i t_2, t. j. ona zraka t_1, koja je centralna projekcija i ujedno preložaj t_2. Ta zraka $t_1 \equiv t_2$ prolazi nužno kroz S_0, kroz vrh P_1 i kroz preloženi vrh P_2 (gl. na pr. u sl. 287. točke S_0, T_s i T_0).

Posve slični odnosi nastat će i onda, ako smo pramen $[P]$ okrenuli oko r u Π prema gore (slika 294.). I tu će oba pramena $[P_1]$ i $[P_2]$ imati dvije pripadne zrake t_1 i t_2, koje padaju u isti pravac.

Dvije točke A i B u prostoru određuju cijeli niz točaka na nekom pravcu s (slika 295.). Taj niz, koji možemo zamisliti ispunjen svim ostalim

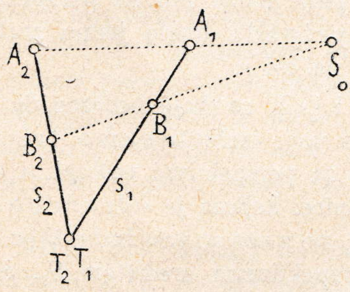


Sl. 294.

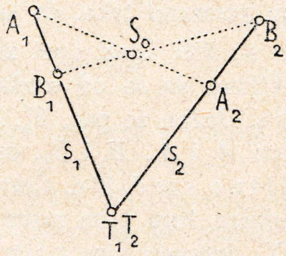


Sl. 295.

točkama njegovim, obilježit ćemo s $[s]$. Centralna će projekcija niza $[s]$ iz nekoga središta S biti opet niz točaka $[s_1]$. Pojedine pripadne (korespondentne) točke A i A_1, B i B_1, ... tih obadvaju nizova daju spojnice, koje idu točkom S. Zaokrenimo niz $[s]$ oko pravca s_1 u ravninu slike Π, pa uzmimo, da je središte S došlo u preložaj S_0 (slika 296. i 297.). Preloženi niz obilježit ćemo sa $[s_2]$. Obadva će niza $[s_1]$ i $[s_2]$ u Π imati zajedničku točku $T_1 \equiv T_2$, koja je probodište T_1 pravca s na Π i u koju pada



Sl. 296.



Sl. 297.

i preložaj T_2 toga probodišta. Poslije preloženja doći će nizovi u jedan ili drugi položaj (sl. 296. i 297.), već prema tomu, jesu li nizovi $[s]$ i $[s_1]$ u prostoru bili na istoj strani ili na različnim stranama središta S.

Centralnu projekciju i središte S možemo pustiti sasvim s vida i promatrati dva perspektivna pramena ili dva perspektivna niza u ravnini, za koje će vrijediti ova pravila:

a) Dva *perspektivna pramena* $[S_1]$ i $[S_2)$ u ravnini jesu takvi prameni, koji imaju jednu zajedničku zraku $t_1 = t_2$, *koja pripada jednom i drugom pramenu*, a ostale se pripadne (t. j. istim slovom obilježene) zrake a_1 i a_2, b_1 i b_2, ... sijeku u točkama A, B, ... *istoga pravca* r. Pravac se r zove *perspektivna os* tih pramenova.

b) Dva *perspektivna niza* $[s_1]$ i $[s_2]$ u ravnini jesu takvi nizovi, koji imaju jednu zajedničku točku $T_1 = T_2$, *koja pripada jednom i drugom nizu*, a ostale pripadne (t. j. istim slovom obilježene) točke A_1 i A_2, B_1 i B_2, ... daju spojnice, koje idu *istom točkom* S_0. Ta se točka zove *perspektivno središte* tih nizova.

c) Napokon ćemo *pramen* $[P]$ i niz $[p]$ u ravnini zvati *perspektivnima*, ako svaka zraka pramena prolazi pripadnom (jednako obilježenom) točkom niza, dakle zraka a točkom A, b točkom B i t. d.

Ukratko se perspektivni položaj označuje znakom $\overline{\wedge}$, pa ćemo za navedena tri slučaja imati ove oznake:

$$[S_1]\,\overline{\wedge}\,[S_2],\quad [s_1]\,\overline{\wedge}\,[s_2],\quad [P]\,\overline{\wedge}\,[p].$$

Iz sl. 293. izlazi, da se dva pramena, za koje hoćemo, da budu perspektivni, smiju po volji izabr ti *samo tri para zrakâ*. Jedan par, $t_1 = t_2$, mora poradi navedenoga uvjeta pasti u jedan pravac, a druga će dva izabrana para a_1 i a_2, pa b_1 i b_2 dati dvije sjecišne točke A i B, kojima je *određena perspektivna os*. Četvrti par c_1, c_2 ne može se više izabrati po volji, jer sjecište C toga para mora biti na perspektivnoj osi r. Svakoj zraci x_1 jednoga pramena *pripada* dakle jedna zraka x_2 drugoga pramena tako, da se obje sijeku na osi r.

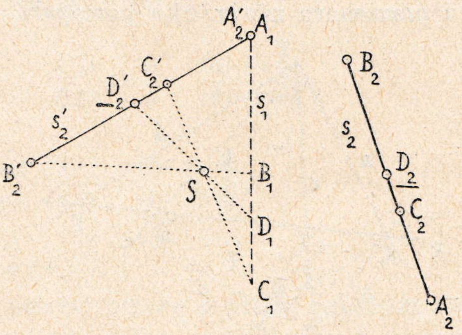
Iz sl. 296. izlazi opet za nizove $[s_1]$ i $[s_2]$, za koje hoćemo da budu perspektivni, da se od svakoga mogu po volji izabrati *samo tri para točaka*. Jedan se par, T_1, T_2, ujedinjuje za perspektivni položaj, a ostala dva para A_1 i A_2, B_1 i B_2, daju dvije spojnice, kojima je *određeno perspektivno središte*. Četvrti par C_1, C_2 ne može se više izabrati po volji, jer spojnica toga para mora prolaziti perspektivnim središtem S_0. Svakoj točki X_1 jednoga niza *pripada* dakle jedna točka X_2 drugoga niza tako, da spojnica tih točaka prolazi središtem S_0.

Dva se perspektivna pramena ili niza mogu *nadopunjivati*, t. j. za *svaku* se zraku jednoga pramena može s pomoću perspektivne osi odrediti pripadna zraka drugoga pramena, a za *svaku* točku jednoga niza s pomoću perspektivnoga središta naći pripadna točka drugoga niza.

158. Projektivna srodnost. Zamislimo, da su zadana dva perspektivna niza $[s_1]$ i $[s'_2]$ za perspektivno središte S (slika 298.). Niz ćemo $[s_1]$ pridržati netaknut, a niz ćemo $[s'_2]$ dovesti na kojegod drugo mjesto u ravnini, ali tako, da se kod toga udaljenosti $A'_2 B'_2$, $B'_2 C'_2$, ... ne poremećuju. U novom ćemo položaju niz obilježiti s $[s_2]$, a njegove točke s A_2, B_2, C_2, ... Bit će dakle $A_2 B_2 = A'_2 B'_2$; $B_2 C_2 = B'_2 C'_2$ i t. d. Obadva niza $[s_1]$ i $[s_2]$ ne će više biti perspektivna. No obadva će niza i opet biti u srodnosti, t. j. svakoj će točki X_1 prvoga niza pripadati u drugome nizu samo jedna posve određena točka X_2, i to ona, u koju je došla točka X'_2 iz pređašnjega svoga položaja na s'_2, gdje je spojnica $X_1 X'_2$ prolazila perspektivnim središtem S.

Takovi nizovi, koji su rastavljeni iz perspektivnoga položaja, zovu se projektivni nizovi. Navedeno srodstvo, prema kojemu u svakom nizu pripada jednoj točki određena točka drugoga niza, zove se projektivna srodnost. Znak je za projektivnu srodnost ili za projektivitet ovaj: $\overline{\wedge}$. Za naša ćemo dva niza zabilježiti ovako: $[s_1] \overline{\wedge} [s_2]$.

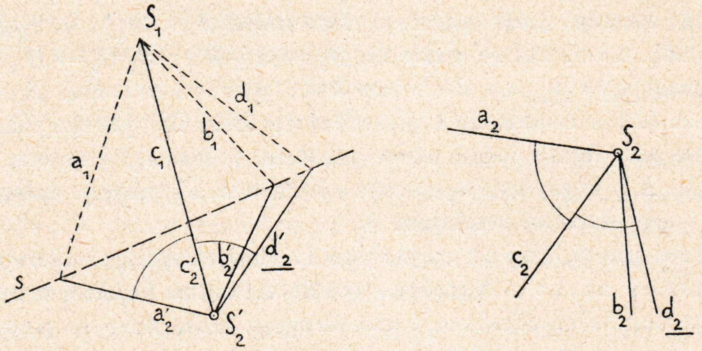
Ako su dakle zadana dva projektivna niza $[s_1]$ i $[s_2]$, moći ćemo ih dovesti u perspektivni položaj. Namjestit ćemo $[s_2]$ prema $[s_1]$ u kojigod položaj $[s'_2]$, ali tako, da na pr. A_2 dođe u $A_1 \equiv A'_2$. Odakle izlazi, da i u projektivnim nizovima $[s_1]$ i $[s_2]$ možemo izabrati po volji samo tri pripadna para točaka A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, jer su ta tri para upravo potrebna i dovoljna, da se odredi perspektivni položaj za $[s_1]$ i $[s'_2]$ (gl. § **157.**). Treba li za neku točku D_1 na $[s_1]$ odrediti pripadnu točku D_2 na $[s_2]$, dovest će se $[s_2]$ u perspektivni položaj $[s'_2]$, naći perspektivno središte S za $[s_1] \overline{\wedge} [s'_2]$, povući $D_1 S$ do D'_2 na s'_2, a onda na s_2 učiniti $A_2 D_2 = A'_2 D'_2$. Obrnuto će se za neku točku niza $[s_2]$ naći istim načinom pripadna točka na $[s_1]$.



Sl. 298.

U slici 299. zadana su dva projektivna pramena $[S_1]$ i $[S_2]$. Učinimo li ih perspektivnima tako, da položimo na pr. zraku c_2 na $c_1 \equiv c'_2$, pa uzmemo i po veličini i po smislu $\sphericalangle (c'_2 a'_2) = \sphericalangle (c_2 a_2)$, dalje $\sphericalangle (c'_2 b'_2) = \sphericalangle (c_2 b_2)$, dobit ćemo dva sjecišta $(a'_2 a_1)$ i $(b'_2 b_1)$, kojima prolazi perspektivna os s. Za neku zraku d_1 pramena $[s_1]$ izlazi zraka d'_2 u $[S'_2]$ s pomoću osi s, a tu ćemo zraku d'_2 prenijeti u pramen $[s_2]$ tako, da bude $\sphericalangle (d'_2 c'_2) = \sphericalangle (d_2 c_2)$, gdje se ima opet uzeti obzir i na smisao, u kojem slijedi krak d'_2 na c'_2.

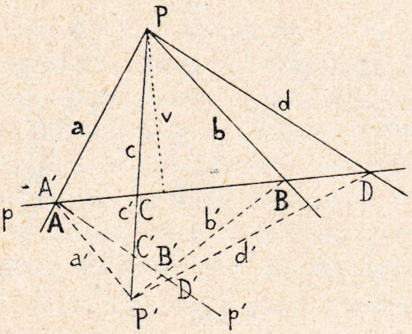
Projektivni se pramenovi $[S_1] \barwedge [S_2]$ mogu tim načinom i dalje nadopunjavati. I za pramenove izlazi opet, da se u svakom mogu po volji izabrati t r i zrake tako, da su parovi a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2, p r i p a d n i. Jedan



Sl. 299.

je par (na pr. c_1 i c_2) potreban za podudaranje $c_1 \equiv c'_2$, a druga d v a za određenje d v i j u točaka osi s.

U sl. 298. i 299. upotrebljena su za nadopunjivanje projektivnih nizova i pramenova m e t r i č k a pomagala, t. j. dužine i kutovi, pa prenošenje tih elemenata s jednog mjesta na drugo. To je učinjeno samo zato, da smisao tih operacija bude što jasniji. N a d o p u n j i v a n j e nizova i pramenâ može se međutim izvesti b e z p o m o ć i d u ž i n â i k u t o v a; geometrija, koja se bavi takvim postupkom, zove se p r o j e k t i v n a (sintetička ili novija) g e o m e t r i j a.



Sl. 300.

Jedno je od najglavnijih pitanja projektivne geometrije ovo: K o j i m s e n a č i n o m m o g u n a d o p u n j i v a t i p r o j e k t i v n i p r a m e n i i n i z o v i, d a s e u z a t o n e u p o t r e b e d u ž i n e i k u t o v i (t. j. šestilo), n e g o s a m o p r a v c i (upotrebom samo jednoga ravnala)?

Do odgovora na to pitanje dolazi se uvođenjem pojma o d v o o m j e r u.

159. Dvoomjer i njegova nepromjenljivost. Uzmimo na pravcu p četiri točke A, B, C i D u kojemgod poretku (s l i k a 300.). Dvije od tih točaka, na pr. $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, učinit ćemo t e m e l j n i m točkama, koje s ostale dvije točke C i D čine četiri dužine $\boldsymbol{A\,C}$, $\boldsymbol{B\,C}$; $\boldsymbol{A\,D}$, $\boldsymbol{B\,D}$. Veličina

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \triangle$$

zove se **dvoomjer** za **četiri točke**, od kojih su A i B temeljne. Kraće se obično piše simbolički

$$(AB\ CD) = \Delta.$$

Uzmimo dalje oko točke P (sl. 300.) četiri zrake a, b, c, d, pa izaberimo dvije od njih, na pr. a i b, **temeljnim** zrakama. Te će dvije zrake činiti s ostale dvije, c i d, četiri kuta $(a\ c)$, $(b\ c)$; $(a\ d)$, $(b\ d)$. Veličina

$$\frac{\sin\,(a\ c)}{\sin\,(b\ c)} : \frac{\sin\,(a\ d)}{\sin\,(b\ d)} = \delta$$

ili simbolički
$$(a\ b\ c\ d) = \delta$$
zove se **dvomjer** za **četiri zrake**, od kojih su a i b temeljne.

Uzmimo, da četiri zrake a, b, c, d oko P u sl. 300. prolaze kroz četiri točke A, B, C, D pravca p, da je dakle $[P] \overline{\wedge} [p]$ (gl. § **157.** *c*).

Ploština trokuta ACP bit će $\frac{1}{2}\ AC.\ v$ ili, (ako a, b, c, d znače dužine AP, BP, ...), $\frac{1}{2}\ a c \sin\,(a c)$, dakle

$$AC.v = ac.\ \sin\,(ac),$$
a isto je tako
$$BC.v = bc.\ \sin\,(bc),$$
$$AD.v = ad.\ \sin\,(ad),$$
$$BD.v = bd.\ \sin\,(bd).$$

Bit će dakle:
$$\frac{AC}{BC} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)},\quad \frac{AD}{BD} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)}.$$
Odatle izlazi
$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)} : \frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)},$$
ili
$$(ABCD) = (abcd),\ \text{t. j.}\ \Delta = \delta.$$

Budući da se u sl. 300. može položaj pravca p prema pramenu uzeti kakogod, izlazi, da se **dvoomjer** za četiri točke, u kojima neki pravac p siječe četiri čvrste zrake, ne mijenja, kakogod izaberemo položaj na p. Obrnuto se **dvoomjer** za četiri zrake, koje su spojnice neke točke P s četiri čvrste točke A, B, C, D na p, ne mijenja, kakogod izaberemo položaj za P.

Za četiri se zrake a, b, c, d kaže, da one **projiciraju** točke A, B, C, D iz P, a za četiri se točke A, B, C, D kaže, da su **presjek** pravca p grupom zrakâ a, b, c, d.

Iz pravila o nepromjenljivosti dvoomjera ($\Delta = \delta$) izlazi neposredno:

1) Dvije grupe od po četiri zrake, na pr. a, b, c, d i a', b', c', d' (sl. 300.), koje su perspektivne ($c \equiv c'$) imaju **isti dvoomjer** $\delta = \delta'$; obje grupe projiciraju naime **iste** četiri točke A, B, C, D na perspektivnoj osi p, pa je zato $\delta = \Delta = \delta'$.

2) Dvije grupe od po četiri točke A, B, C, D na p i $A' B' C' D'$ na p', koje su perspektivne ($A \equiv A'$), imaju isti dvoomjer $\triangle = \triangle'$ (sl. 300.); obje grupe postale su naime tako, da se isti pramen iz perspektivnog središta P', kojemu zrake idu kroz po dvije točke A i A', B i B', C i C' D i D', presjekao pravcima p i p', pa je zato $\triangle = \delta' = \triangle'$.

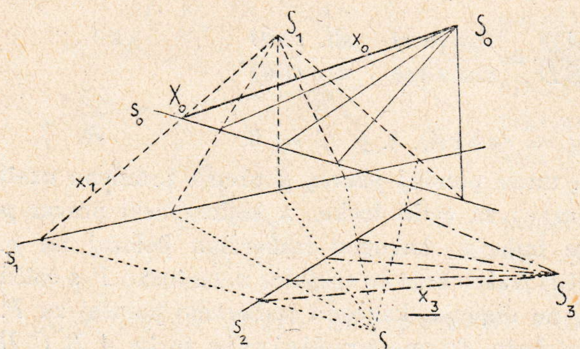
3) Budući da dva projektivna pramena ili niza postaju iz „perspektivnoga položaja" (§ 158.), izlazi: četiri zrake (ili točke) jednoga pramena (ili niza) i njihove pripadne četiri zrake (ili točke) drugoga projektivnoga pramena (ili niza) imaju iste dvoomjere.

Bilješka. Dvoomjer i njegova nepromjenljivost bila je poznata Pappusu (u 4. vijeku pr. Kr.).

Kad bismo dakle u dva projektivna pramena imali poznate po četiri zrake a, b, c, d i a', b', c', d, pa bismo ih htjeli dovesti u perspektivan položaj, položili bismo na pr. a' na a, a ostale bismo zrake b', c', d' prenijeli u nov položaj ne mijenjajući kutove. Zrake b i b' daju točku B, a c i c' točku C, pa je tim perspektivna os BC određena. No sad će se pokazati, da će se i d i d' sjeći u D na osi BC, jer su dvoomjeri $\triangle$ i $\triangle'$ za oba pramena jednaki, pa moraju na pravcu BC dati iste četiri sjecišne točke A, B, C, D.

U slici 301. uzet je pramen $[S_0]$, taj je presječen pravcem s_0 u nizu $[s_0]$, niz je projiciran iz S_1 pramenom $[S_1]$ i t. d. Bit će dakle

$$[S_0] \overline{\wedge} [s] \overline{\wedge} [S_1] \overline{\wedge} [s_1] \overline{\wedge} [S_2] \overline{\wedge} [s_2] \overline{\wedge} [S_3].$$



Sl. 301.

Projiciranjem i sječenjem nije se promijenio dvoomjer za četiri zrake pramena $[S_0]$ tako, da prameni $[S_0]$ i $[S_3]$ imaju istu vrijednost dvoomjera. Prameni $[S_0]$ i $[S_3]$ uopće ne će više biti perspektivni, ali će biti projektivni, jer imaju isti dvoomjer; ujedno se vidi, kako se mogu projektivni prameni $[S_0]$ i $[S_3]$ nadopunjivati samo s pomoću jednoga ravnala. Treba li naći za zraku x_0 u $[S_0]$ pripadnu zraku x_3 u $[S_3]$, odredit će se najprije X_0 na s_0, onda x_1 u $[S_1]$ i t. d., dok se napokon ne dobije x_3 u $[S_3]$, i obrnuto, svakoj zraci pramena $[S_3]$ pripada samo jedna zraka u $[S_0]$. Prameni se dakle $[S_0] \overline{\wedge} [S_3]$ ne trebaju pomicati u perspektivan položaj, nego se mogu nadopunjivati s pomoću jednoga samo ravnala.

Isto vrijedi i za nizove; u sl. 301. bit će nizovi $[s_0]$ i $[s_2]$ projektivni. Taj je posljednji niz postao projiciranjem i sječenjem iz prvoga niza, pa su zato dvoomjeri za četiri pripadne točke tih nizova jednaki.

Zadaci za vježbu.

493.) Udesi dva perspektivna niza tako, da zrake, koje prolaze pripadnim točkama (A_1 i A_2, B_1 i B_2, ,.. budu paralelne. Takovi su nizovi slični.

494.) Ako su u dva pramena kutovi $(a_1\, b_1) = (a_2\, b_2)$, $(a_1\, c_1) = (a_2\, c_2)$, ... onda su prameni kongruentni. U perspektivnom će položaju (na pr. za $a_1 = a_2$) oba pramena biti simetrična prema perspektivnoj osi. Prikaži taj položaj!

495.) Izaberu li se na kružnici k dvije točke S_1 i S_2, pa se iz njih projiciraju točke kružnice $A, B, C, \ldots$, nastat će prameni $a_1, b_1, c_1 \ldots$ i $a_2, b_2, c_2, \ldots$ koji su kongruentni, a nijesu u perspektivnom položaju. Zašto? Jesu li kongruentni prameni projektivni?

496.) Ako su od niza $[s_1]$ zadane tri točke A_1, B_1, C_1, a od projektivnoga niza $[s_2]$ pripadne tri točke A_2, B_2, C_2, pa niz $[s_2]$ treba dovesti u perspektivan položaj s nizom $[s_1]$, zašto je onda svejedno, koji će se par pripadnih točaka ujediniti (na pr. A_1 i A_2, ili B_1 i B_2, ...)? (Gl. § **159.**, *2*).

497.) Ako je zadan pramen $[S_1]$, pa se iz neke točke S_2 njegove ravnine spuste okomice na sve njegove zrake, nastat će drugi pramen $[S_2]$. Jesu li oba pramena projektivna? Isp. zad. 494.

498.) Od nekoga su pramena $[S_1]$ zadane tri zrake a_1, b_1, c_1, a od niza $[s_2]$, koji je pramenu projektivan, tri točke A_2, B_2, C_2. Kako će se $[S_1]$ i $[s_2]$ dovesti u perspektivni položaj? Nad dužinom $A_2\, B_2$ opisat će se kružnica k_1, koja ima nad lukom $A_2\, B_2$ periferni kut jednak kutu $(a_1\, b_1)$, a nad lukom $B_2\, C_2$ opisat će se kružnica k_2, kojoj je periferni kut nad $B_2\, C_2$ jednak kutu $(b_1\, c_1)$. Sjecišna je točka za k_1 i k_2, t. j. S_2, vrh pramena, koji je s $[S_1]$ kongruentan, pa je u perspektivnom položaju s nizom $[s_2]$.

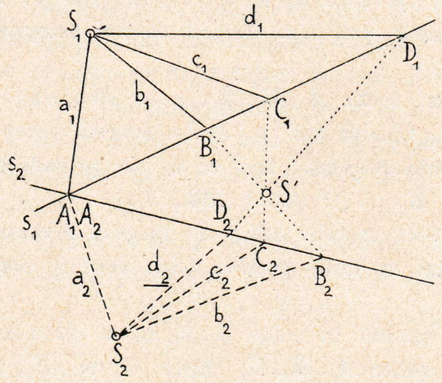
II. Projektivnost i krivulje 2. stepena.

160. Najjednostavnije nadopunjivanje projektivnih pramena. Ako uzmemo, da su u sl. 301. zadana oba krajna pramena $[S_0] \barwedge [S_3]$, ne ćemo moći lako udesiti lanac pramenâ i nizova, kojima se mogu nadopuniti $[S_0]$ i $[S_3]$. Osim toga su među ta dva pramena umetnuta tri niza i još dva pramena, što je svakako velik broj posrednih tvorevina. Projiciranje i sječenje može se udesiti tako, da među dva zadana projektivna pramena ili niza umetnemo samo još jedan pramen ili jedan niz.

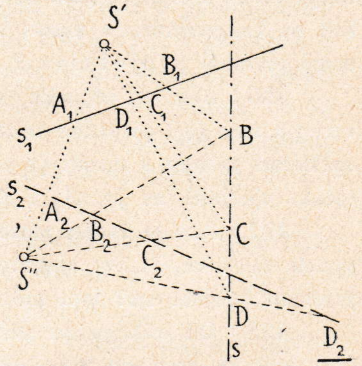
U slici 302. zadana su dva pramena $[S_1]$ i $[S_2]$, koji treba da budu projektivni. Potrebna su dakle tri para pripadnih zraka: a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2. Sjecištem $A_1 \equiv A_2$ obadviju pripadnih zraka a_1 i a_2 položit ćemo po volji dva pravca s_1 i s_2, koji će ostale dvije zrake svakoga pramena sjeći u točkama B_1, C_1 i B_2, C_2. Tako nastali nizovi s_1 $(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ i s_2 $(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ bit će perspektivni, jer imaju zajednički jedan pripadni par elemenata: $A_1 \equiv A_2$. Perspektivno središte S' bit će sjecišna točka spojnicâ $B_1 B_2$ i $C_1 C_2$. Sad je u istini:

$$[S_1] \overline{\wedge} [s_1] \overline{\wedge} [S'] \overline{\wedge} [s_2] \overline{\wedge} [S_2],$$

dakle je $[S_1] \overline{\wedge} [S_2]$. Za zraku d_1 u prvom pramenu odredit će se pripadna zraka d_2 u drugom pramenu, ako se odredi D_1 na s_1, povuče $D_1 S'$ do D_2 na s_2, a napokon zraka $S_2 D_2 \equiv d_2$.



Sl. 302.



Sl. 303.

Dva pramena, koji su s trećim (t. j. s $[S']$) perspektivni, jesu među sobom projektivni. S pomoću toga trećega pramena mogu se zadana dva nadopuniti.

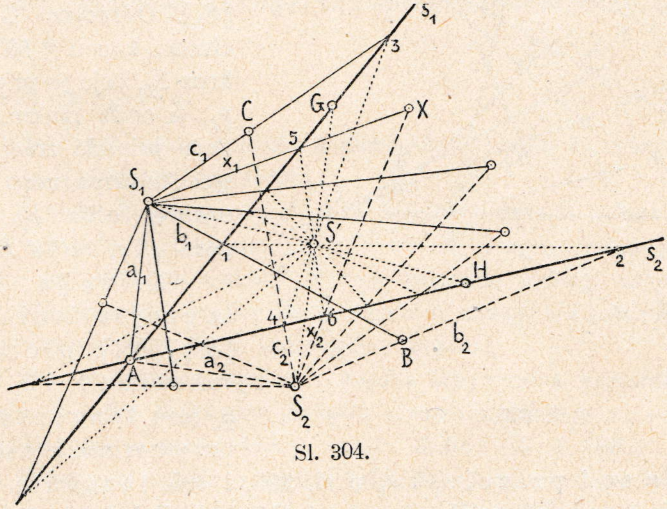
Ako su zadana dva projektivna niza s_1 i s_2 (slika 303.), svaki s tri točke A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2, izabrat će se na spojnici jednoga pripadnoga para, na pr. na $A_1 A_2$, po volji točke S' i S'', pa će se te točke obadvaju nizova iz tih središta projicirati. Nastat će dva pramena $[S']$ i $[S'']$, koji su perspektivni, jer imaju jednu zajedničku pripadnu zraku, t. j. $S' A_1 \equiv S'' A_2$. Perspektivna je os s određena. Ako za D_1 na s_1 treba odrediti D_2 na s_2, povući će se $S' D_1$ do sjecišta D na s, spojiti D sa S'' i potražiti presjek D_2 te spojnice na s_2.

Dva niza, koji su perspektivni s trećim, jesu dakle među sobom projektivni.

Tim se načinom udesilo najjednostavnije nadopunjivanje dvaju projektivnih pramenâ ili nizova uz pomoć samo jednoga ravnala.

161. Projektivno izvođenje krivuljâ 2. stepena. Odredimo li za dva projektivna pramena sve moguće pripadne parove zraka, možemo postaviti pitanje: Što čine sjecišta svih pripadnih parova? Projektivna geometrija pokazuje, da je geometrijsko mjesto dobivenih sjecišta krivulja 2. reda (sjekotina stošca), koju svaki pravac ravnine siječe najviše u dvije točke.

Odredimo li za dva projektivna niza sve moguće parove pripadnih točaka, pa svaki par pripadnih točaka spojimo u pravac, možemo pitati: Što čine sve ovako dobivene spojnice? Projektivna geometrija pokazuje, da će sve te spojnice biti tangente iste sjekotine stošca. Kako se na svaku takvu sjekotinu mogu iz neke točke njezine ravnine povući dvije tangente, zove se sjekotina stošca još i krivulja 2. razreda. Krivulje 2. reda ujedno su i 2. razreda, pa se zato zovu i krivulje 2. stepena.



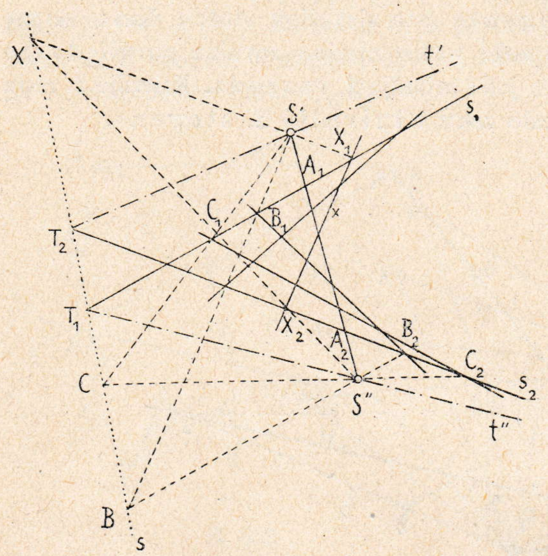
Sl. 304.

U slici 304. zadana su opet dva projektivna pramena $[S_1]$ i $[S_2]$, svaki s tri zrake a_1, b_1, c_1 i a_2, b_2, c_2. Prameni će se nadopunjivati posve onako, kao što je pokazano u § **160**. Pripadni parovi zrakâ, dakle a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2, . . . , x_1 i x_2 . . . . daju sjecišta $A, B, C, \ldots, X, \ldots$, koja čine krivulju drugoga reda (u sl. 304. elipsu). Ako od svih zraka pomoćnoga pramena $[S']$ povučemo upravo onu, koja ide vrhom S_1 i siječe s_2 u H, bit će $S_1 H$ i $S_2 H$ par pripadnih zraka u oba zadana pramena. Točka H pripada dakle krivulji. Isto je tako sjecište G pravaca $S' S_2$ i s_1 točka krivulje.

Ako su zadana dva projektivna niza $[s_1]$ i $[s_2]$ (slika 305.), svaki s tri točke A_1, B_1, C_1 i $A_2\, B_2\, C_2$, moći će se oni nadopunjivati posve onako, kako je izvedeno u sl. 303. Spojnica svakoga para pripadnih točaka bit

će tangenta krivulje drugoga razreda (u sl. 305. parabola). Ako od svih točaka pomoćnoga niza s izaberemo upravo onu, koja je sjecište T_1 pravcem s_1, pa spojimo $T_1 S''$, dobit ćemo tangentu krivulje, jer će $T_1 S''$ biti spojnica dviju pripadnih točaka na s_1 i s_2. Isto će tako spojnica vrha S' s točkom $T_2 \equiv s s_2$ biti tangenta krivulje.

162. Svojstva krivuljâ 2. stepena u svezi s projektivnim izvođenjem.



Sl. 305.

a) Oba projektivna pramena $[S_1]$ i $[S_2]$ u sl. 302. i 304. nemaju zajedničke pripadne zrake, jer bi inače bili u perspektivnom položaju. Spojnica $S_1 S_2$ može se dakle obilježiti s p_1, ako uzmemo, da pripada kao zraka pramenu $[S_1]$ ili s q_2, ako je računamo kao zraku pramena $[S_2]$. Odredimo li istim načinom, kao u § **161.**, zraku p_2 kroz S_2, koja je pripadna zraci p_1, a onda zraku q_1 kroz S_1, koja pripada zraci q_2, bit će sjecište pripadnoga para p_1, p_2 upravo točka S_2, a sjecište para q_1, q_2 točka S_1.

Krivulja, izvedena iz projektivnih pramena $[S_1] \overline{\wedge} [S_2]$, prolazi dakle vrhovima S_2 i S_1. Pravci p_2 i q_1 jesu tangente krivulje u tim vrhovima. Isto se tako može pokazati, da su i pravci s_1 i s_2 u sl. 303. i 305. tangente krivulje, koja izlazi iz projektivnih nizova $[s_1] \overline{\wedge} [s_2]$. Zajednička točka pravaca s_1 i s_2 nije pripadni par za oba niza, jer bi nizovi bili inače perspektivni. Ta će se točka obilježiti s P_1 i Q_2. Pripadne će točke P_2 na s_2 i Q_1 na s_1 biti dirališta na tangentama s_2 i s_1.

b) Na svakoj će zraci x_1 pramena $[S_1]$ u sl. 304. biti samo dvije točke krivulje, vrh S_1 i još jedna točka X, u kojoj x_1 siječe pripadnu zraku x_2. Isto tako izlazi i za sl. 305., da će svakom točkom X_1 na s_1 ići samo dvije tangente na krivulju, i to s_1 i još ona tangenta, koja spaja X_1 s pripadnom točkom X_2 na s_2. Projektivna geometrija pokazuje to svojstvo i za kojigod pravac ili za kojugod točku ravnine, pa tim dokazuje još općenije, da su te krivulje 2. reda i 2. razreda.

c) Budući da je za projektivnost pramena $[S_1]$ i $[S_2]$, sl. 304. nužno poznavanje triju pripadnih parova zrakâ, poznate su odmah i tri točke

krivulje, t. j. one, u kojima se sijeku pripadni parovi, i još dvije točke, t. j. vrhovi S_1 i S_2, u svemu dakle pet točaka. Zadamo li obrnuto pet točaka S_1, S_2, 1, 2, 3, možemo prve dvije učiniti vrhovima projektivnih pramena, koji će imati ova tri para pripadnih zraka: S_1 1 i S_2 1, S_1 2 i S_2 2, S_1 3 i S_2 3. Prameni se dakle mogu nadopuniti.

Krivulja drugoga reda određena je s pet svojih točaka. Sličnim se načinom pokazuje, da je za određenje krivulje drugoga razreda potrebno pet tangenta.

d) Uzmemo li na krivulji 2. reda kojegod dvije točke S_1 i S_2 pa ih spojimo s ostalim točkama krivulje, dobit ćemo dva projektivna pramena. Uzmemo li pak na krivulji 2. razreda dvije čvrste tangente s_1 i s_2 pa ih presiječemo svim ostalim tangentama krivulje, dobit ćemo dva projektivna niza.

e) Točke i tangente krivulje 2. stepena mogu se crtati samo jednim ravnalom.

Zadaci za vježbu.

499.) Uzmi pet točaka u ravnini i nacrtaj onu krivulju 2. reda, koja je njima određena. Odredi dostatan broj točaka!

500.) U točki P_1 na krivulji 2. reda, koja je u ravnini zadana, nacrtaj tangentu. Uzmi vrh jednoga pramena u P_1, a vrh P_2 drugoga pramena u kojojgod točki krivulje, pa odredi za zraku $P_2 P_1 \equiv p_2$ pripadnu zraku p_1 za pramen $[P_1]$.

501.) Dva pramena, koji izvode kružnicu, moraju biti kongruentni. Zašto? Za izvođenje kružnice nije dosta samo jedno ravnalo!

502.) Ako se kružnica zajedno s obadva kongruentna pramena, koji je izvode, projicira iz točke S prostora na neku ravninu σ, dobit će se krivulja 2. reda i dva projektivna pramena, koji je izvode. Zašto? (Gl. § **156**.).

503.) Izaberi pet točaka u ravnini tako, da njima određena krivulja 2. reda bude hiperbola, pa nađi još druge točke krivulje. (Pomisli na dvije grane krivulje pa izaberi od oka na jednoj dvije točke, na drugoj tri).

504.) Odredi u sl. 305. dirališta parabole na tangentama s_1 i s_2.

505.) Od krivulje 2. reda poznate su četiri točke S_1, S_2, 1, 2 i tangenta p_1 u S_1. Nađi druge točke krivulje. Zadanim su dijelovima određena tri para zrakâ za dva projektivna pramena i to: $S_1 p_1$, S_1 1, S_1 2 u prvom pramenu, a $S_2 S_1$, S_2 1, S_2 2 u drugom pramenu. Dalji je postupak isti kao u sl. 304.

506.) Od krivulje drugoga reda poznate su tri točke S_1, S_2, 1 i tangente p_1 i q_2 u dvjema (S_1 i S_2) od tih točaka. Nađi druge točke krivulje! Poznata su dva projektivna pramena: $S_1 p_1$, $S_1 S_2$, S_1 1 i $S_2 S_1$, $S_2 q_2$, S_2 1.

Treći odsjek.

Historijski pregled o razvoju opisnoga mjerstva.

163. Perspektiva i ortogonalna projekcija. Prvi počeci opisnoga mjerstva — kao i cijeloga mjerstva (geometrije) uopće — postali su iz opažanja prirode i iz praktičnih potreba. Promatranje objekata dovelo je do osnovnih pravila perspektive, a izvođenja prerazličnih građevina staroga vijeka tražila su nužno najjednostavnije crtnje na tlu i na vertikalnoj ravnini, da se unaprijed ustanove omjeri za visine, širine i debljine.

Pravila o perspektivi služila su u umjetničkim slikovnim predočivanjima, i to samo u posve netočnu i nedostatnu obliku. Jedan primjer za to, da se i perspektiva upotrebila za praktične svrhe, daje nam Hiparhova stereografska projekcija, koja je služila u astronomskim opažanjima, a koju je kasnije Ptolemej upotrebio za crtanje zemaljske površine u kartama (gl. § **131.**).

Za gradnju egipatskih piramida (oko 3500. god. prije Kr.), za gradnju hrama Jerusalemskoga (oko g. 1000. pr. Kr.), pa za bezbroj vanrednih građevina grčkih i rimskih može se s dosta sigurnosti ustvrditi, da su izvedene uz pomoć empirički sastavljenih slika, koje danas zovemo „tlocrtom" i „nacrtom". Rimski arhitekt Vitruvije Pollio napisao je (god. 10. pr. Kr.) u 10 knjigâ djelo o arhitekturi, u kojem se govori o crtnjama kao osnovama za izvođenje gradnjâ.

Historija perspektive pokazuje, kako se ona sve do druge polovine 17. vijeka upotrebljavala gotovo jedino za umjetničke svrhe. No perspektiva se tečajem vremena izgrađivala u naučnom smjeru, pa su tako nastali mnogi novi vidici i nove metode konstruiranja, koje su u najnovije doba poslužile i za napredak teoretske geometrije.

Prvi počeci o pravilima perspektive nalaze se u Euklidovoj „Optici", gdje se pokazuje, da se slike paralelnih pravaca u perspektivi među sobom „približavaju". Posve nesigurno i nedostatno upotrebljavali su to svojstvo slikari na slikama u Pompeju; „nedogledi", kojima se točno određuju perspektive paralelnih pravaca, nijesu dugo još bili poznati.

Istom na početku renesanse (u 15. vijeku) izvodio je Filip Brunelleschi prve točnije (geometrijske) linearne perspektive uzevši za ishodište tlocrte i nacrte, a s tim je u svezi pokazao arhitekt Leon Battista Alberti, da se slike svih pravaca, koji su normalni na ravnini slike, stječu u jednoj točki (koju danas zovemo „glavnom točkom"). Nedogled za kojigod smjer paralelnih pravaca uveo je istom oko g. 1600. Guido Ubaldo. Po prilici u isto doba, kad je Descartes osnovao analitičku geometriju, upotrebio

je Desargues (oko g. 1636.) koordinate za perspektivno predočivanje točke (gl. metodu distancijâ; gl. § **146.**), prešavši ujedno iz posebne perspektive u općenu centralnu projekciju. Sve od početka renesanse pa do konca 18. vijeka utjecala je perspektiva znatno na umjetničke smjerove; zvali su je „lijepom znanošću". O tome svjedoče mnoge tvorevine Rafaelove, Ticijanove, Veroneseove i dr.

Jače geometrijsko obilježje podao je centralnoj projekciji J. H. Lambert, koji je u djelu „Freye Perspektive" (1774.) odriješio perspektivu od svake veze s tlocrtom i nacrtom, pokazavši ujedno, kako se u centralnoj projekciji mogu izravno razriješiti različne geometrijske zadaće. Od toga je vremena podan centralnoj projekciji poseban teoretski smjer.

Na početku 19. vijeka počela se njegovati relijefna perspektiva, u kojoj se sastavljaju prostorni oblici modelima, ne onakovima, kakovi su u istini, nego kakovi nam se prikazuju gledanjem. Relijefna je projekcija kugle elipsoid, kocka se prikazuje kao nepravilna prikraćena piramida, za koju bi se po četiri brida sjekla u istoj točki i t. d. I pozornice u kazalištima udešene su prema pravilima relijefne perspektive: strop se spušta prema dnu, pod je nagnut prema gledaocu, pobočne se stijene prema dnu zbližuju. Sve se to gledaocu ne pričinja samo tako, kako je navedeno, nego je sve u istini tako udešeno, da se postigne što veći perspektivni utisak. Relijefna je perspektiva danas osobito znatna u teoretskom smjeru.

U 16. i 17. vijeku njegovala se osobito „stereotomija" (od grč. stereós = prostoran i tomé = sječenje), u kojoj su se crtnjom predočivali dijelovi kamena i drva, koji su za posebne građevne svrhe morali imati određene različne oblike i prereze. Svaki se takov problem rješavao za sebe i svaki put osobitim nekim načinom, a to je iziskivalo znatnih teškoća.

Gaspard Monge, prijatelj Napoleonov i znatan geometar (u 2. polovini 18. vijeka), nastojao je, da sve one prerazlične metode, kojima su se priređivali tlocrti i nacrti prostornih oblika, svede na najjednostavnije principe. Za tu je svrhu doveo tlocrte i nacrte u međusobnu zavisnu svezu (ravnine Π_1, Π_2 i os x!). Pokazao je, da će se uvijek, kadgod se na pr. radi o probodištu pravca ravninom, postupati istim načinom, ako se samo svaki put odrede tragovi ravnine i projekcije pravca i t. d. Tako je bilo moguće, da se svi prerazlični zadaci o prostornim odnosima svedu na neke najjednostavnije stalne zadatke u projekcijama (gl. § **34.**—**43.**).

Monge je trideset godina radio na izgrađivanju te nove nauke „opisnoga mjerstva" (deskriptivne geometrije), no nije mu bilo dopušteno, da išto o njoj iznese u javnost. Istom g. 1798. mogao je izdati djelo pod natpisom „Géométrie descriptive", koje je odmah prokrčilo put u naučne krugove i u obuku. Glasoviti francuski matematik Lagrange uskliknuo je, kad je čuo prva predavanja Mongeova o opisnom mjerstvu: „Prije negoli sam slušao

Mongea, nijesam ni slutio, da znam deskriptivnu geometriju!“ Taj poklik pokazuje, kako je jasno i pregledno udesio Monge svoj sistem projiciranja na dvije ravnine. Lagrange ushićen od te nove nauke rekao je o Mongeu: „Ce diable d' homme sera immortel!“

Monge je učinio, da se geometrija prostora zbližila s geometrijom ravnine, tako da je od njegova načina projiciranja bilo koristi za praktičnu potrebu jednako kao i za teoretski smjer geometrijskih istraživanja. Perspektiva, gnomonika (gl. § **165.**) i stereotomija, koje su se grane napose njegovale prije Mongea, dobile su zajedničke posve nove i preglednije osnove. Usporedimo li napredak u opisnom mjerstvu u 19. vijeku s usavršenjem perspektive prije Mongea, možemo lako uvidjeti, da se ta geometrija u jednom vijeku razvila znatno brže i potpunije negoli perspektiva za vrijeme od više nego 3000 godina.

164. Praktični i teoretski smjer opisnoga mjerstva. Praktična primjena opisnoga mjerstva ima danas odlučnu riječ u tehnici; u arhitekturi, u gradnji mostova i cesta, u konstrukciji strojeva, u elektrotehnici, u brodogradnji, u umjetnom obrtu, pa u sastavljanju geografskih karata i dr. imaju postignuti veličajni uspjesi svoje osnove u potpunoj jasnoći i određenosti opisnomjerstvenih procesa. Centralna je projekcija dobila novo polje primjene, t. zv. „fotogrametriju“, u kojoj se iz dvije različne fotografije (t. j. centralne projekcije) istoga predmeta može odrediti tlocrt i nacrt predmeta, pa se tako konstruktivnim putom doznaju sve dimenzije i omjeri za predmet u pravim veličinama. Tako se utjecajem Mongeovim opet zbližila centralna projekcija (perspektiva) s normalnim projiciranjem u nov oblik.

U tečaju 19. vijeka pridošle su još i druge metode projiciranja, od kojih su najznatnije ove: kotirana projekcija (gl. § **8.—17.**), koja služi za prikazivanje visinskih odnosa u terenu s osobitim obzirom na zadatke u geodeziji, pa aksonometrija (napose „kosa projekcija“, gl. § **23.—27.**), koja u sebi spaja slikovitost predočivanja i lakoću mjerenja, dakle dovodi obilježja perspektive i normalnih projekcija u najužu svezu.

U obuci ima opisno mjerstvo zadaću, da razvije i usavrši sposobnost nutarnje predodžbe o prostoru i da učvrsti sadržinu stereometričkih odnosa. Tako opisno mjerstvo odlučno podupire upoznavanje matematike uopće, napose u stereometriji, u nauci o svojstvima površina, u sfernoj trigonometriji, u astronomskim zadacima, u prostornoj analitičkoj geometriji i t. d.

Ako se za čas ne obazremo na ono, što se projekcijama prikazuje, nego na način, kako se to čini, onda dolazi u obzir nauk o različnim „metodama“ opisnoga mjerstva. Najopćenija je metoda „centralnoga projiciranja“. Zamislimo li, da se središte S toga projiciranja sve više udaljuje od vertikalne ravnine slike, onda će se zrake projiciranja približavati sve više onom međusobnom položaju, u kojem napokon postaju paralelne. Paralelne

zrake, koje upadaju koso prema ravnini slike, izvode onda „kosu projekciju". Ako su zrake projiciranja sve normalne na ravnini slike, dobit ćemo „normalnu" (ortogonalnu) projekciju, i to „kotiranu", ako upotrebimo kote, ili pak „Mongeove projekcije", ako ravnini slike dodamo još jednu (horizontalnu) ravninu pa i na nju projiciramo ortogonalno. Određenje sjene neke tvorevine nije drugo nego „koso projiciranje".

Projiciranje možemo shvaćati i tako, da se njim svakoj točki neke prostorne tvorevine pridjeljuje neka točka (projekcija) u ravnini; u tome se smislu može ispitivati zavisnost toga pridjeljenja (korespondencije elemenata). Kaže se, da je svaka točka neke tvorevine (na pr. kružnice) preslikana u neku točku druge tvorevine (na pr. elipse, koja je projekcija one kružnice). U kolinearnoj srodnosti (napose u afinitetu) radi se upravo o takvom preslikavanju (gl. § **106**. i **107**.).

Iz centralnoga projiciranja razvila se „projektivna" (sintetička, novija) geometrija (§ **158**.). Tome su razvoju pridonijeli osobito Francuz J. V. Poncelet i Nijemac J. Steiner (u prvoj trećini 19. vijeka). U toj se grani geometrije ističe proučavanje krivulja 2. stepena na temelju projektivne srodnosti u opreci prema onom načinu, koji su za te krivulje upotrebljavali stari geometri (Apolonije) ili prema načinu, kojim se služi analitička geometrija (Descartes). Ta se projektivna geometrija do danas razvila do gotovo potpune savršenosti; njezino je osobito polje primjene onaj dio mehanike, koji se označuje imenom „grafička statika", i u kojem se konstruktivnim putom izvode uvjeti za ravnotežu silâ u ravnini i u prostoru.

Pojam „preslikavanja" dade se protegnuti i na projektivnu geometriju; možemo naime za dva projektivna (ili perspektivna) pramena reći, da je jedan „preslikan" u drugi. Kod toga se pokazuje, da jednoznačnost preslikavanja nije drugo negoli upravo ono pridjeljenje pripadnih zraka, koje čini „projektivnost" tih pramenâ.

U projektivnoj se geometriji istražuju u prvome redu oni odnosi, koji ne zavise o veličinama (dužinama i kutovima), nego samo o međusobnom položaju tvorevina (pramenâ, nizova i dr.). Zato projektivnu geometriju zovu još i „geometrijom položaja".

Rezultati, do kojih je došla projektivna geometrija, imali su znatan utjecaj na opisno mjerstvo; mnogi se način rješavanja za pitanja Mongeove geometrije znatno ujednostavnio upotrebom projektivne geometrije. Od toga pak teoretskoga usavršivanja crpu korist i praktične primjene, koje se služe našom naukom.

Rješavanja svih pitanjâ, koja se tiču deskriptivne ili projektivne geometrije, svezana su nužno s konstruktivnim operacijama; te se operacije izvode spravama za crtanje. Upotreba takvih sprava dovodi dakle sa sobom neki stepen netočnosti; rezultati će biti to jače zavisni o tim netočnostima,

što se više crtalo pravaca, kružnica i dr. Francuz Lémoine postavio je zato nedavno izvjesna pravila, prema kojima treba izvoditi konstruktivne operacije, da netočnost bude svedena na najmanju mjeru. Ta se Lémoineova nauka prozvala geometrografijom.

Od velikoga broja novijih manjih knjiga o opisnom mjerstvu, koje se obaziru na elemente naše nauke, neka budu spomenute ove:

R. Haußner, Darstellende Geometrie, Leipzig, 1900.

Izdanje Mongeova djela „Géométrie descriptivé" (Klasici eksaktnih nauka, Ostwald, br. 117).

J. Hjelmslev, Darstellende Geometrie, Leipzig 1914.

M. Grossmann, Elemente der darst. Geometrie, Leipzig 1917.

M. Grossmann, Darstellende Geometrie, Leipzig 1915.

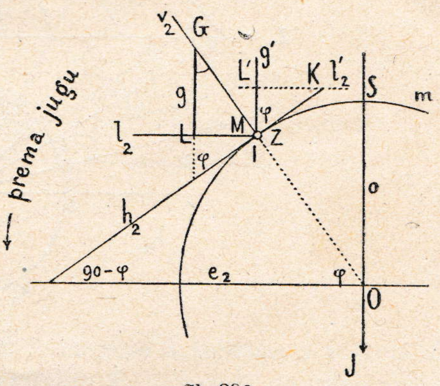
E. Lebon, Traité de géométrie descriptive et géométrie cotée, Paris 1901.

V. T. Wilson, Descriptive geometry with a collection of exercices and practical applications, New-York 1909.

DODATAK.

165. Zadaće o konstrukciji sunčanih ura. Na površini zemlje izabrat ćemo mjesto M, koje ima geografsku širinu φ (slika 396.) i meridijan m. Ravnina μ meridijana m ujedno je ravnina crtnje u sl. 306.; pred ravninom crtnje imamo istočnu stranu, iza te ravnine zapadnu stranu, lijevo je od M južna, a desno sjeverna strana.

Dodirna je ravnina χ u točki M na zemaljsku površinu horizont točke M; ona siječe ravninu crtnje u tragu h_2, koji je tangenta na m u M. Položit ćemo dalje u M ravninu v, koja ide središtem O zemlje, te na ravnini crtnje μ stoji normalno. Tu ćemo ravninu zvati vertikalnom ravninom za M; njezin je trag na μ pravac $v_2 \equiv OM$.



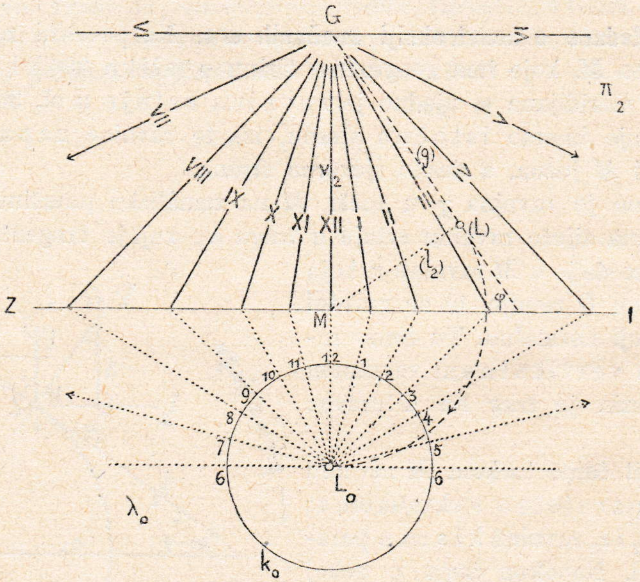
Sl. 306.

Položit ćemo točkom M ravninu λ, koja je paralelna s ekvatorom ε; tragovi su l_2 i e_2 ravninâ λ i ε na μ paralelni pravci. Napokon ćemo u nekoj točki G traga v_2 vertikalne ravnine postaviti pravac $g \perp \lambda$; njegovo je nožište L na λ u tragu l_2. Budući da pravci e_2 i v_2 zatvaraju geografsku širinu φ mjesta M, bit će kut $LGM = 90 - \varphi$. Pravac je dakle g nagnut prema horizontu pod kutom φ, prema vertikali u M pod kutom $90 - \varphi$, a paralelan je s osi o zemlje.

Prividno opisuje sunce dnevno kružnicu, kojoj je ravnina normalna na svjetskoj osi (ujedno osi zemlje). Možemo zamisliti, da za različne dnevne položaje sunca pada sjena osi na ekvatorovu ravninu tako, da će za svaku dnevnu uru ta sjena odsjeći na ekvatoru 24. dio njegove obodnice. Uzmemo

li dalje, da će poradi velike daljine sunca od zemlje sjene pravca g na ravninu λ biti paralelne sa sjenama osi na ravninu ekvatora za svaku pojedinu dnevnu uru (isp. § **44**.), možemo u λ oko L opisati kakvugod kružnicu k i njezinu obodnicu razdijeliti na 24 jednaka dijela. Za svaku uru dana prolazit će dakle sjena pravca g kroz jednu takvu djelišnu točku 6, 7, . . . 12, 1, 2, ... 6 kružnice k.

Kad je sunce na jugu od M u ravnini μ meridijana m, bit će podne: sjena će pravca g pasti u l_2 i to od L prema M. Šest sati prije toga, t. j. u 6^h ujutru, bit će sunce na istoku, t. j. pred ravninom crtnje, i to u ravnini α_6, koja ide pravcem g i stoji normalno na μ. Sjena će pravca g na λ, t. j. trag ravnine α_6, ići točkom L normalno na μ prema zapadu. U 6^h po podne određuje sunce s pravcem g opet ravninu α_6, koja će λ sjeći u



Sl. 307.

sjeni, što ide točkom L normalno na μ prema istoku. Tako će isto za svaku ostalu dnevnu uru sunce činiti s pravcem g po jednu ravninu α_i, koja će λ sjeći u sjeni pravca g; te će pak sjene prolaziti pojedinim djelišnim točkama i (u razmacima od 15 lučnih stupnjeva) na k.

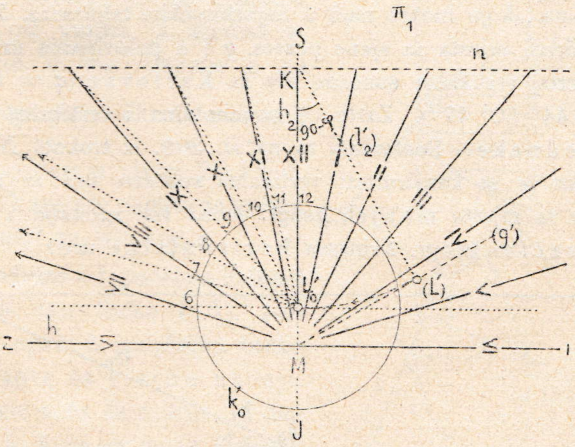
Ovo se određenje sjenâ na ravnini λ može lako prenijeti na vertikalnu ravninu v; zamislimo li naime pojedine ravnine α_6, α_7, ... μ, α_1, α_2, ... α_6 produžene, dok sijeku v, dobit ćemo na toj ravnini za dnevne ure sjene pravca g, koje sve prolaze točkom G. Iz tih sjena možemo obrnuto zaključiti na položaj sunca, t. j. na doba dana.

Skup svih sjena iz točke G na vertikalnu ravninu mjesta M, koje su označene oznakama za ure VI, VII, ... XII, I, II, ... VI, čine **sunčanu vertikalnu uru** za mjesto M. Konstrukcija takve ure, t. j. **određenje** pravaca G VI, G VII, . . . G XII, ... G VI, u koje će pasti sjene pravca g za pojedine dnevne ure, bit će za mjesta različnih geografskih širina različna.

Bilješka. Prve su sunčane ure sastavili Kaldejci oko g. 750. pr. Kr. Grci su nazvali pravac g gnómon (kazalo), a prema tomu se ta naučna grana o sastavljanju urâ zvala „gnomonika".

Vertikalna ravnina υ i horizontalna ravnina χ za mjesto M sijeku se u pravcu IZ (istok-zapad), koji se u sl. 306. prikazuje kao točka.

Uzmimo vertikalnu ravninu kao nacrtnu ravninu Π_2 (slika 307.), a horizontalnu ravninu kao tlocrt Π_1 i izaberimo u Π_2 točku G, u kojoj će pod kutom $90 - \varphi$ prema Π_2 biti pričvršten štap g. Oko vertikale v_2 preložit ćemo g u (g), a kroz M položiti pravac $M(L) \perp (g)$. Taj je pravac $M(L)$ preloženi trag (l_2) ravnine λ, gl. sl. 306. Daljina točke L od M vidi



Sl. 308.

se u pravoj veličini $M(L)$. Zaokrenemo li ravninu λ zajedno s točkom L oko IZ dolje u Π_2, možemo nacrtati kružnicu k_0 i povući pojedine zrake L_0 6, L_0 7, ... L_0 12, ... L_0 6, koje znače sjene pravca g na ravnini λ. Sjecišta tih zraka s pravcem IZ, spojena s točkom G, daju smjerove sjenâ na **vertikalnoj sunčanoj uri**.

U sl. 306. prikazani su i odnosi za određenje **horizontalne ure** u točki M. Položit ćemo u M pravac (gnómon) $g' \parallel o$, dakle pod kutom φ prema horizontu, tako, da je kraj pravca g' okrenut prema sjeveru S, a onda normalno na g' gdjegod ravninu λ', koja se u slici prikazuje svojim tragom $l'_2 \perp g'$. Oko nožišta L' pravca g' na λ' opisat ćemo opet kružnicu k',

koju ćemo kao i prije podijeliti na 24 jednaka dijela. Svakom djelišnom točkom prolazit će sjena pravca g' za pojedine dnevne ure. Ravnina χ i λ' sijeku se u pravcu n, koji je u sl. 306. normalan na ravnini crtnje.

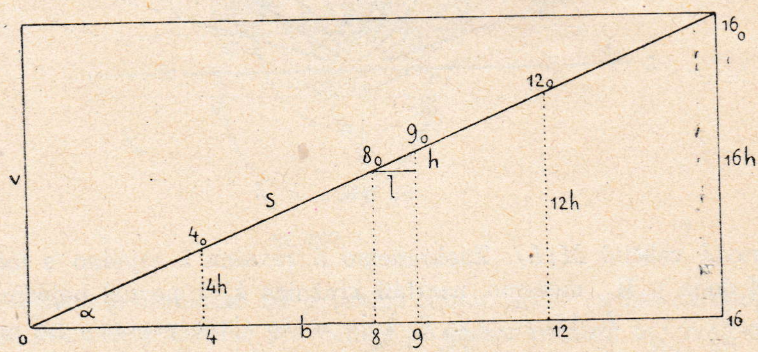
U slici 308. uzet je horizont za tlocrtnu ravninu Π_1. Pravac g' kroz M, koji s h_2 čini kut φ, preložen je oko h_2 u (g'), a na nj je iz K spuštena normala $K\ (L')$. Dužina te normale zaokrenuta je oko n u Π_1 tako, da (L') dolazi u L'_0. Opišemo li oko L'_0 kojugod kružnicu k'_0, podijelimo je u 24 jednaka dijela, a onda povučemo zrake $L'_0 6, L'_0 7, \ldots, L'_0 12, \ldots L'_0 6$ do sjecišta njihovih s n, dobit ćemo u spojnicama tih sjecišta s točkom M sjene pravca g' za različne dnevne dobe na horizontalnoj sunčanoj uri.

Zadaci za vježbu.

507.) Nacrtaj horizontalne sunčane ure za Zagreb ($\varphi = 45^0\ 48'\ 54''$) i za Osijek ($\varphi = 45^0\ 33'\ 44''$). Crtaj te kutove s pomoću prirodnih vrijednosti funkcije tangens, koje možeš naći u logaritmičkim tablicama. Za jedinicu mjere uzmi 1 dm. Odredi mjesta za sjene pravca g i u polovinama urâ.

508.) Nacrtaj vertikalne sunčane ure za Karlovac ($\varphi = 45^0\ 29'\ 34''$) i za Zemun ($\varphi = 44^0\ 50'\ 47''$). Zašto će horizontalna i vertikalna ura za Karlovac biti gotovo jednake? Rastumači to na sl. 306. iz trokutâ NLG i $ML'K$.

509.) Kako će se konstruirati vertikalna sunčana ura za neku točku ekvatora? Zašto će za mjesta manjih geogr. širina biti zgodnije vertikalne ure, a za mjesta s većim geogr. širinama horizontalne ure?

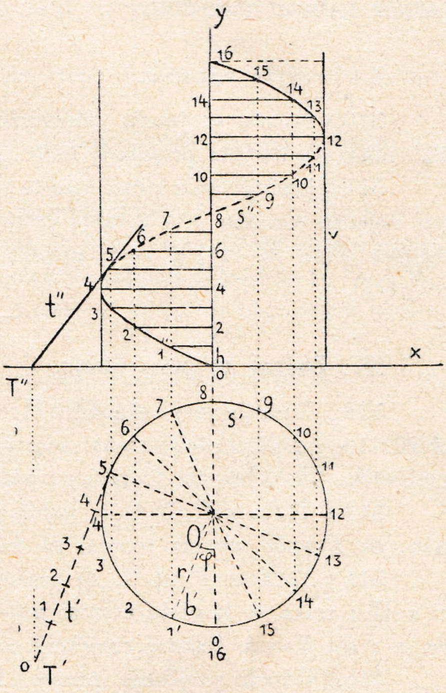


Sl. 309.

166. Cilindrična spirala. U slici 309. nacrtan je pravokutnik, kojemu je osnovka razdijeljena na 16 jednakih dijelova. Povucimo dijagonalu s pravokutnika i uzdignimo u 8. i 9. djelišnoj točki osnovke okomice na nju do sjecišta 8_0 i 9_0 na s; razlika visinâ za točke 8 i 9 bit će h, a daljina 8 9 neka bude označena s l. Ako je kut, što ga čini s s osnovkom b, jednak α,

bit će $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}$ na kojemgod mjestu pravca s. Zamislimo, da se pravokutnik savije u uspravni valjak tako, da se kraće stranice pravokutnika sastave pred ravninom crtnje, prijeći će pravac s u krivu crtu na valjku, koja se zove **cilindrična spirala**. Obje su projekcije valjka i spirale prikazane u slici 310.

Na ordinalama djelišnih točaka (16) osnovnoga kruga b' bit će po jedna točka spirale tako, da je razlika visinâ tih točaka na dvije susjedne ordinale jednaka h (gl. sl. 309.). Projekcije će se dakle spirale crtati tako, da se u djelišnim točkama 0—16 osnovke b' postave ordinale, a na osi valjka od osnovne ravnine prenesu dijelovi h od 1—16. Ordinala u djelištu 6 i horizontalan pravac u točki 6 na osi sjeći će se u točki 6 spirale.



Sl. 310.

Točka, koja izvodi spiralu na površini valjka, okreće se od početne točke 0 oko osi valjka, a ujedno se diže vertikalno u vis. Okrene li se točka za $\frac{2}{16}$ potpunoga okreta oko osi, dignut će se ujedno u vis za **2** h i t. d. Svaki malen luk spirale nagnut je prema osnovnoj ravnini za isti kut α.

Dio izvodnice od početne točke 0 na Π_1 pa do one točke (16), kad spirala dolazi opet u izvodnicu točke 0 na valjku, zove se **visina zavoja** v. Ta je visina veća ili manja, a zavisi o dužini h, koja se može izabrati po volji. Spirala može biti više stisnuta ili više otegnuta.

Pravci, koji spajaju točku spirale (na pr. 4) sjednako obilježenom točkom (4) na osi valjka, svi su normalni na osi. Zamislimo li iz svake točke spirale spuštenu normalu na os, ispunjavat će svi ti pravci površinu, koja se zove uspravna zavojna površina (njem. gerade Schraubenfläche). Često se susreću takove površine kod stubâ, koje su nanizane oko vertikalne osi, a zakreću se spiralno u visinu. Uzmemo li u sl. 310. drugu projekciju osi valjka kao os ordinatâ y, a os $x \equiv (\Pi_1 \Pi_2)$ za os apscisâ, bit će za točku 1'' spirale u drugoj projekciji $x = r . \sin \varphi$, ako je r polumjer osnovke, a φ kut 0 O' 1'. Budući da je dalje

$$\varphi : 2\pi = h : v$$
$$= y : v,$$

bit će

$$x = r \, . \sin \frac{2\pi}{v} y$$

jednadžba spirale u drugoj projekciji. To je pak jednadžba sinusove crte.

Treba li za tu crtu odrediti tangentu t'', na pr. u točki 5, povući će se tangenta t' u 5 na b' i na nju odmotati dužina luka od 5 do 0, koja izlazi iz sl. 309. Krajna je točka T' probodište tangente na Π_1, a time je određena tangenta t''. Prikloni je kut svake tangente prema ravnini Π_1 jednak kutu α u sl. 309.

Zadaci za vježbu.

510.) Nacrtaj projekcije cilindričke spirale, kojoj tangente čine s Π_1 kut od 45^0, tako, da nacrtna projekcija bude „kosinusova crta".

511.) Predoči cilindričnu spiralu u kosoj projekciji ($\alpha = 30$, $pr. = \frac{1}{3}$). Preloži najprije osnovku b u ravninu crtnje, izvedi kosu projekciju osnovke i odredi djelišne točke (0—16) u kosoj projekciji, a onda postupaj dalje kao u normalnoj projekciji.

---

167. Zadaci za ponavljanje.

512.) Ravnine projekcijâ Π_1 i Π_2 neka budu u I. kvadrantu zrcala; točkom A (2, 3, 1) prolaze dvije zrake, koje se reflektiraju na Π_1 i Π_2, a onda prolaze kroz točku B (5, 2, 4). Odredi projekcije tih zraka.

513.) Točkom P (3, 1, 3) položi pružac, kojemu su krajne točke u Π_1 i Π_2, tako, da P bude sredina prušca, pa da je kut prušca prema osi x $\alpha = 60^0$.

514.) Točkom P (3, 2, 1) prolazi neka zraka, koja nije paralelna ni s Π_1 ni s Π_2; zraka se lomi na ravnini ρ (—1, 1·5, 1) tako, da je konstanta refrakcije $\sin \alpha : \sin \beta = \frac{4}{3}$. Nacrtaj projekcije zrake poslije loma.

515.) Odredi projekcije pravca, koji s Π_1 čini priklon $\alpha = 45^0$, a s Π_2 priklon $\beta = 30^0$ [Ako su probodišta toga pravca P'_1 i P''_2, a njihove projekcije na osi x P''_1 i P'_2, prikaži najprije posebno četverokut $P'_1 \, P''_1 \, P''_2 \, P'_2$, razastrt u ravninu crtnje; uzmi $P'_1 \, P''_2$ po volji].

516.) Položi točkom M (3, 1, 2) pravac, koji čini s Π_1 i Π_2 jednake priklone (30^0). Isp. zad. 140.

517.) Odredi ravninu, koja s Π_1 čini kut $\gamma = 60^0$, s Π_2 kut $\delta = 45^0$. [Ravnina je ta normalna na pravcu, koji ima s Π_1 i Π_2 komplementarne priklone 30^0 i 45^0; isp. zad. 515.].

518.) Nekim općeno položenim pravcem položi ravninu, koja s Π_1 i Π_2 čini jednake priklone.

519.) Ravnina je zadana tragovima r_1 i r_2; $\sphericalangle r_1 x = 60^0$, $\sphericalangle r_2 x = 30^0$. Izračunaj kut $r_1 r_2$ i uvjeri se o točnom računu crtnjom. Isp. § 138.

520.) Točkom P položene su dvije dužine $a = PA$, $b = PB$ i neki neomeđen pravac p tako, da a, b i p nijesu u istoj ravnini. Odredi veličinu komponente c na p tako, da resultanta komponenata a, b i c čini s p kut 60^0.

521.) Zadana su tlocrtna probodišta P_1, Q_1, R_1 triju pravaca p, q, r, koji će se sjeći u istoj točki V tako, da bude $p \perp q$, $q \perp r$, $p \perp r$. Odredi točku V. Zašto će 1. projekcija za V biti sjecište triju visina za trokut $P_1\ Q_1\ R_1$?

522.) Odredi projekcije kugle, koja ide točkom A (3, 4, 2), a dotiče Π_1 i Π_2, te ima zadan polumjer $r = 3{\cdot}5$.

523.) Kroz četiri točke, koje nijesu u istoj ravnini, položi kuglu i odredi njezine projekcije.

524.) Odredi projekcije kugle, koja ide trima zadanima točkama i dotiče općeno položenu ravninu ρ.

525.) Odredi kuglu, koja ide točkama A i B, dotiče zadanu ravninu ρ i ima zadan polumjer r.

526.) Točkom A (3, 4, 1) položi kuglu, koja dotiče Π_1, Π_2 i $\Pi_3 \perp x$.

527.) Kroz tri točke A, B, C (u Π_1) položi kuglu, koja dotiče zadanu kuglu.

528.) Zadane su dvije nejednake kugle; spojnica je njihovih središta $O_1\, O_2 \perp \Pi_1$. Položi nekom točkom P njihova presjeka ravninu σ, koja će obje kugle sjeći u jednako velikim kružnicama.

529.) Položi točkama A i B rotacioni valjak, koji dotiče zadanu općeno položenu ravninu ρ. (Potencija s obzirom na kružnicu!)

530.) Zadane su tri jednako velike kugle; prikaži u projekcijama četvrtu kuglu, koja sve tri zadane dotiče i ima zadani polumjer r. Odredi sva tri dirališta.